**Конспект лекций по разделу «Тригонометрия»**

|  |
| --- |
| **План** |
| Введение |
| Тригонометрические функции числового аргумента, знаки, значения функций некоторых углов. |
| * Основные тригонометрические тождества. * Формулы сложения аргументов. * Формулы приведения. * Формулы двойных и половинных углов. * Формулы сложения одноименных функций. |
| Свойства и графики тригонометрических функций: |
| Обратные тригонометрические функции |
| Тригонометрические уравнения |
| Тригонометрические неравенства |
| Вывод |
| Разработка урока «Обратные тригонометрические функции и их вычисления» |
| Список литературы |

**Введение**

Тригонометрия возникла как аппарат для вычисления неизвестных параметров треугольника по заданным значениям других его параметров. Так, методами тригонометрии по данным сторонам треугольника можно вычислить его углы, по известной площади и двум углам вычислить стороны и т.д. Необходимость отыскивать неизвестные параметры данного треугольника впервые возникла в астрономии, и в течение долгого времени тригонометрия была одним из ее разделов.

Первые методы нахождения неизвестных параметров данного треугольника были развиты учеными Древней Греции за несколько веков до нашей эры. Греческие астрономы не рассматривали синусов, косинусов и тангенсов. Вместо таблиц этих величин они составили и использовали таблицы, позволяющие отыскивать хорду окружности по стягиваемой ею дуге. Дальнейшее развитие тригонометрия получила в средние века в работах индийских и арабских ученых. Современные буквенные обозначения появились в тригонометрии в середине XVIII века. Приблизительно в то же время в тригонометрии стала рассматриваться радианная мера угла, были введены тригонометрические и обратные тригонометрические функции числового аргумента, после чего тригонометрия приобрела свой современный вид.

**Тригонометрические функции числового аргумента,**

**основные соотношения, знаки**

**Радианная и градусная мера угла.**

Угол – часть плоскости, ограниченной двумя лучами, исходящими из одной точки, называемой вершиной угла.

Рассмотрим новое определение угла. Пусть одна из сторон угла совпадает с положительным направлением оси Ох (луч *l1*), а вершина угла – с началом координат. На луче *l2* на расстоянии R=1 от начала возьмем точку *А*. Тогда при вращении луча *l2* точка *А* опишет окружность с радиусом R=1, которую мы будем называть единичной окружностью (*рис.1*).

Угол, полученный при повороте отрезка ОА, можно охарактеризовать двумя способами – радианной и градусной мерой.

При градусном измерении за 10 принимается 1/360 полного угла. Тогда полный угол равен 3600, развернутый 1800, прямой угол 900. В радианной мере величина угла измеряется длиной соответствующей ему дуги. Например, величина полного угла равна длине окружности, т.е. в данном случае 2π (здесь π=3,141596 – отношение длины окружности к диаметру. При вычислениях будем пользоваться значением π≈3,14), величина развернутого угла есть π, величина прямого угла равна π/2. Часто вместо записи величины угла в виде бесконечной десятичной дроби ее записывают в долях π. Так, величину прямого угла записывают π/2 вместо 1,57.

Градусный и радианный способы измерения углов равноправны и используются достаточно широко.

В некоторых случаях используют доли градуса – минуты и секунды. Минута – это 1/60 доля градуса и записывается так: 1′=(1/60)0; секунда – это 1/60 доля минуты и записывается так: 1′′=(1/60) ′.

Отметим, что при градусном измерении обозначения нужно обязательно записывать (знаки 0 ,′ ,′′), а радианное обозначение всегда пропускают, записывая просто число радианов: 1; 0,75; 4,5; π.

Часто приходится переходить от градусного измерения к радианному и обратно. При этом используют следующие формулы:

|  |  |
| --- | --- |
| *y*  II *l2*  I  *A*  R=1  *l1*  *0 x*  III IV  *рис.1* |  |

Луч *l2* единичной окружности можно вращать в двух направлениях: по часовой стрелке и против часовой стрелки. При движении *l2* против часовой стрелки будем считать полученный угол положительным, а при движении этого луча по часовой стрелке – отрицательным (*рис.2*).

При построении угла на единичной окружности луч *l1* всегда совпадает с положительным направление оси *Ох*, а луч *l2* вращается в соответствии с заданным условием. При этом луч *l2* пересечется с единичной окружность в точке *Аα*(*рис.3*). Точка *Аα ,* как всякая точка плоскости, имеет свои координаты *(х;у).*

|  |  |
| --- | --- |
| *y*  *l2*      α  0 β *l1  x*  *l2*  *рис.2* | *y*  *l2*  *Aα*  *y*  *l1*  *0 x x*  *рис.3* |

**Определение. *Синусом*** угла α называется ордината точки *Аα* пересечения подвижного луча и единичной окружности;

***косинусом*** угла α называется абсцисса точки *Аα* ;

***тангенсом*** угла α называется отношение ординаты точки *Аα*  к ее абсциссе;

***котангенсом*** угла α называется отношение абсциссы точки *Аα*  к ее ординате.

Если угол α оканчивается в четверти, то абсцисса и ордината точки *Аα(х;у)* являются длинами катетов прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной 1. В этом случае определения тригонометрических функций угла α совпадают с определением тригонометрических функций острого угла треугольника.

Если угол α оканчивается в любой другой четверти, то при нахождении значений тригонометрических функций необходимо учитывать знаки координат точки *Аα(х;у)*.

**Знаки тригонометрических функций** зависят от того, в какой четверти оканчивается заданный угол.

Так как синусом называется ордината точки *Аα*, то синус положителен в I и II четвертях и отрицателен в III и IV четвертях (*рис.4*).

Поскольку косинусом называется абсцисса точки *Аα*, косинус положителен в I и IV четвертях и отрицателен в II и III четвертях (*рис.5*).

Так как тангенс угла есть отношение ординаты точки *Аα* к ее абсциссе, то тангенс положителен, когда знаки координат совпадают, и отрицателен, когда знаки координат различны (*рис.6*). Такие же знаки имеет и котангенс. Следовательно, тангенс и котангенс положительны в I и III четвертях и отрицательны в II и IV четвертях.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Знаки синуса***  *y*  II I  + +  0 *x*  - -  III IV  *рис.4* | ***Знаки косинуса***  *y*  II I  - +  0 *x*  - +  III IV  *рис.5* |

|  |
| --- |
| ***Знаки тангенса и котангенса***  *y*  II I  - +  0 *x*  + -  III IV  *рис.6* |

**Значения тригонометрических функций некоторых углов приведены в следующей таблице:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Углы  α  Функция | 0 |  |  |  |  |  |  | 2 |
| 0 | 300 | 450 | 600 | 900 | 1800 | 2700 | 3600 |
|  | 0 | 1/2 |  |  | 1 | 0 | -1 | 0 |
|  | 1 |  |  | 1/2 | 0 | -1 | 0 | 1 |
|  | 0 |  | 1 |  | Не сущ. | 0 | Не сущ. | 0 |
|  | Не сущ. |  | 1 |  | 0 | Не сущ. | 0 | Не сущ. |

Напомним **понятия периодичности, четности и нечетности функций.**

Функция называется **периодической**, если существует такое число *T* (называемое периодом), что для всех выполняются равенства  и . Для построения графика периодической функции с периодом *T* достаточно провести построение на отрезке длиной *T* и затем полученный график параллельно перенести на расстояние *nT* вправо и влево вдоль оси *Ох*.

Все тригонометрические функции являются периодическими. Так как при вращении точки она, сделав полный оборот или несколько полных оборотов, займет первоначальное положение, ее координаты не изменяются. Следовательно, функции  и  являются периодическими и их наименьший период равен 2π (3600), а функции  и  являются периодическими и их наименьший период равен π (или 1800).

Итак, ,  (*k* - целое неотрицательное число); ,  (*k* - целое неотрицательное число).

Вследствие того, что значение периодических функций не меняется от прибавления к аргументу целого числа периодов, для удобства вычислений можно добавлять или отбрасывать любое целое число периодов.

**Четной функцией** называется функция, для которой при всех допустимых значениях аргумента выполняется равенство . **Нечетной функцией** называется функция, для которой при всех допустимых значениях аргумента выполняется равенство . График четной функции симметричен относительно оси ординат. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Среди тригонометрических функций имеется только одна четная . Для нее справедливо равенство . Все остальные функции,  и  являются нечетными. Для них справедливы равенства ,  и .

**Основные тригонометрические тождества**

Тригонометрические функции связаны между собой следующими основными тождествами:

|  |  |
| --- | --- |
| I.  II.  III. | IV.  V.  VI. |

Из тождества I вытекают формулы  и , которыми мы будем часто пользоваться.

С помощью основных тригонометрических тождеств решается задача отыскания значений всех тригонометрических функций по известному значению одной из них.

**Формулы сложения аргументов**

**1. **

**2. **

**3. **

**4. **

**5. **

**6. **

**Формулы двойных и половинных углов**

Полагая  в формулах 1, 3, 5 сложения аргументов, получим следующие формулы двойных углов:

**1. **

**2. **

**3. **

Из формулы **2** вытекают два часто употребляемых соотношения

**4.**  или 

**5.**  или 

Из формул **4.** и **5.** можно получить формулы половинных углов:

**6. , **,

где знак зависит от четверти, в которой оканчивается угол α/2.

Заменяя в равенствах **1.- 3.** 2α на α, а α на α/2, находим:

**7. **

**8. **

**9. **

Кроме того, и выражаются через тангенс половинного угла по формулам

**10. **

**11. **

**Формулы приведения**

Значения тригонометрических функций острых углов вычисляют по таблицам. Значения функций любых углов можно вычислить с помощью формул приведения к острому углу.

Сформулируем общее правило написания формул приведения:

1. Знак тригонометрической функции определяют по первоначально заданному углу.
2. Если аргумент можно представить как сумму или разность π, 2π и острого угла, то название функции не изменяют.
3. Если аргумент можно представить как сумму или разность π/2, 3π/2 и острого угла, то название функции изменяют на сходное (синус – на косинус, тангенс – на котангенс).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Функция** | **Аргумент** | | | |
|  |  |  |  |
|  |  |  | **-** |  |
|  |  | **-** |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

**Формулы сложения одноименных функций**

Формулы сложения одноименных тригонометрических функций позволяют преобразовать сумму и разность функций в произведение этих функций. Они имеют следующий вид:

**1. **

**2. **

**3. **

**4. **

Как их получаем?

Сложим соответственно левые и правые части формул сложения аргументов **1.** и **2.,** введем новые переменные: **** и ****, тогда  и .

Т.е. ****

Теперь заменим  на  и получаем формулу сложения синусов: ****

Аналогичные действия производим с формулами суммы и разности аргументов косинусов.

**Свойства и графики тригонометрических функций**

****

1. Область определения – множество всех действительных чисел.
2. Область изменения (множество значений) – промежуток .
3. Функция **** нечетная: ****.
4. Функция **** периодическая. Наименьший положительный период равен 2π: ****.
5. Нули функции: **** при .
6. Промежутки знакопостоянства:

при ,

при .

1. Функция ****

возрастает при 

и убывает при .

1. Функция **** принимает

минимальные значения, равные -1, при ,

и максимальные значения, равные 1, при .

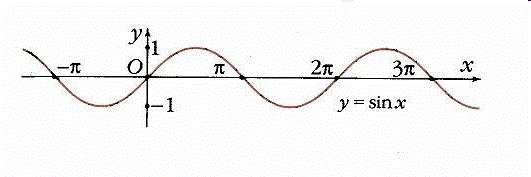


График функции **** называют **синусоидой**.

****

1. Область определения – множество всех действительных чисел.
2. Область изменения (множество значений) – промежуток .
3. Функция **** четная: ****.
4. Функция **** периодическая. Наименьший положительный период равен 2π: ****.
5. Нули функции: **** при .
6. Промежутки знакопостоянства:

при ,

при .

1. Функция ****

возрастает при 

и убывает при .

1. Функция **** принимает

минимальные значения, равные -1, при ,

и максимальные значения, равные 1, при .

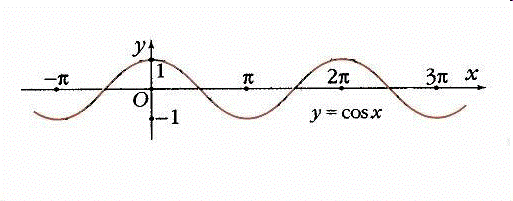


График функции **** также называют **синусоидой**.

****

1. Область определения – множество всех действительных чисел, кроме чисел .
2. Область изменения (множество значений) – множество всех действительных чисел.
3. Функция **** нечетная: ****.
4. Функция **** периодическая. Наименьший положительный период равен π: ****.
5. Нули функции: **** при .
6. Промежутки знакопостоянства:

при ,

при .

1. Функция **** возрастает в каждом из промежутков .

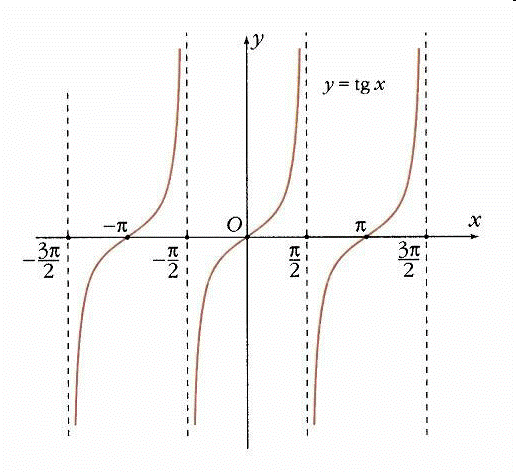


График функции **** называют **тангенсоидой**.

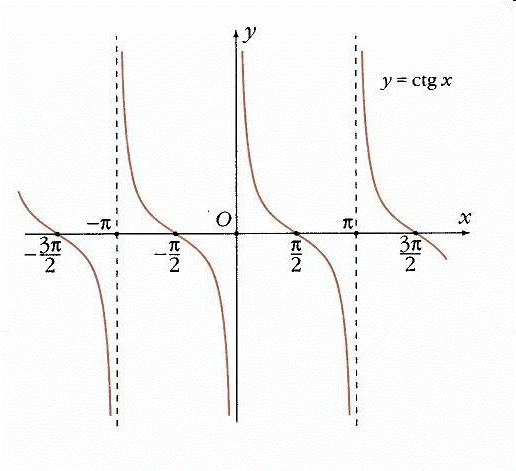
****

1. Область определения – множество всех действительных чисел, кроме чисел .
2. Область изменения (множество значений) – множество всех действительных чисел.
3. Функция **** нечетная: ****.
4. Функция **** периодическая. Наименьший положительный период равен π: ****.
5. Нули функции: **** при .
6. Промежутки знакопостоянства:

при ,

при .

1. Функция **** убывает в каждом из промежутков .



**Обратные тригонометрические функции**

***Теорема о корне***

***Пусть функция  монотонна (возрастает или убывает) на промежутке I, число a – любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение  имеет единственный корень*** *b*  ***в промежутке I.***

*у*

*y=f(x)*

*a*

*0 b x*

Доказательство: Докажем единственность корня уравнения ***.***

Пусть существует *с* – еще один корень уравнения .

Т.е. .

, либо .

Т.к. ****** монотонна, то , либо , что противоречит предположению.

Следовательно, *b* - единственный корень.

*y*

*y=f(x)*

*a*

*0 b c x*

Функция  возрастает на отрезке  и принимает все значения от -1 до 1. Следовательно, по теореме о корне, для любого числа *a*, такого, что , в промежутке  существует единственный корень *b* уравнения . Это число *b* называют арксинусом числа *a* и обозначают .

**Арксинусом числа *a*** называется число из отрезка , синус которого равен *a*.

**Функция  на отрезке  имеет обратную функцию, которая называется арксинусом и обозначается .**

**Функция  обладает следующими свойствами:**

**1) **

**2) **

**3) , где **

**4) **

Функция  убывает на отрезке и принимает все значения от -1 до 1. Поэтому для любого числа *a*, такого, что , на отрезке  существует единственный корень *b* уравнения . Это число *b* называют арккосинусом числа *a* и обозначают .

**Арккосинусом числа *a*** называется такое число из отрезка , косинус которого равен *a*.

**Функция**  **на отрезке**  **имеет обратную функцию, которая называется арккосинусом и обозначается .**

**Функция  обладает следующими свойствами:**

**1) **

**2) **

**3) , где **

**4) **

На интервале  функция  возрастает и принимает все значения из *R*. Тогда, по теореме о корне, для любого числа *a*  из интервала  существует единственный корень *b* уравнения . Это число *b* называют арктангенсом числа *a* и обозначают .

**Арктангенсом числа *a*** называется такое число из интервала , тангенс которого равен *a*.

**Функция**  **на промежутке**  **имеет обратную функцию, которая называется арктангенсом и обозначается .**

**Функция  обладает следующими свойствами:**

**1) **

**2) **

**3) , где **

**4) **

Функция котангенс на интервале  убывает и принимает все значения *R.* Следовательно, по теореме о корне, для любого числа *a*  из интервала  существует единственный корень *b* уравнения . Это число *b* называют арккотангенсом числа *a* и обозначают .

**Арккотангенсом числа *a*** называется такое число из интервала , котангенс которого равен *a*.

**Функция**  **на промежутке**  **имеет обратную функцию, которая называется арккотангенсом и обозначается .**

**Функция  обладает следующими свойствами:**

**1) **

**2) **

**3) , где **

**4) **

**Тригонометрические уравнения**

С помощью обратных тригонометрических функций можно решать простейшие тригонометрические уравнения:

|  |
| --- |
| *любое число;*  *любое число;* |

**Уравнение **. Очевидно, что если , то уравнение

** (1)**

не имеет решений, поскольку  для любого *х.*

Пусть . Надо найти все такие числа *х*, что ****. На отрезке  существует в точности одно решение уравнени (1) – это число .

Косинус – четная функция, и, значит, на отрезке  уравнение (1) также имеет в точности одно решение – число -. Итак, уравнение **** на отрезке  длиной 2π имеет два решения:  (совпадающие при *а=1*).

Вследствие периодичности функции  все остальные решения отличаются от этих на  , т.е. формула корней уравнения (1) такова:

 **(2)**

(Обратите внимание: этой формулой можно пользоваться только при ).

При *а=1* числа  и - совпадают (они равны нулю), поэтому решение уравнения **** принято записывать в виде .

Особая форма записи решений уравнения (1) принята также для *а=-1* и *а=0*:

**** при 

**** при .

**Уравнение **. Уравнение

** (3)**

не имеет решений при , так как  для любого *х.*

При  на отрезке  уравнение (3) имеет в точности одно решение . На промежутке  функция **** убывает и принимает все значения от -1 до 1. По теореме о корне уравнение (3) имеет и на этом отрезке один корень. Из рисунка видно, что этот корень есть число , равное . Действительно, . Кроме того, поскольку , имеем  и  , т.е. число  принадлежит отрезку .

Итак, уравнение (3) на отрезке  имеет два решения:  и  (совпадающие при ). Учитывая, что период синуса равен , получаем такие формулы для записи всех решений уравнения:

 **(4)**

 **(5)**

Удобно решения уравнения (3) записывать не двумя, а одной формулой:

 **(6).**

Нетрудно убедиться, что при четных  из формулы (6) находим все решения, записанные формулой (4); при нечетных  – решения, записываемые формулой (5).

Если *а=1,* точисла  и  совпадают, поэтому решение уравнения  принято записывать так: .

При *а=-1* и *а=0*  принята следующая запись решений:

**** при 

**** при .

**Уравнение **.

При любом  на интервале  имеется ровно одно такое число *х*, что , - это **.**

Поэтому уравнение

** (7)**

имеет на интервале длиной π единственный корень.

Функция тангенс имеет период π.

Следовательно, остальные корни уравнения (7) отличаются от найденного на , т.е.

 **(8)**

**Уравнение **.

При любом  на интервале  имеется ровно одно такое число *х*, что ****, - это **.**

Поэтому уравнение

** (9)**

имеет на интервале длиной π единственный корень.

Функция котангенс имеет период π.

Следовательно, остальные корни уравнения (9) отличаются от найденного на , т.е.

 **(10)**

**Тригонометрические неравенства**

|  |  |
| --- | --- |
| **Вид неравенства** | **Множество решений неравенства ()** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**Вывод**

Слово «тригонометрия» искусственно составлено из греческих слов: «тригонон» – треугольник и «метрезис» - измерение (соответствующим русским термином было «треугольникомерие»). Основная задача тригонометрии состоит в решении треугольников, т.е. в вычислении неизвестных величин треугольника по данным значениям других его величин. Так, в тригонометрии решают задачу о вычислении углов треугольника по данным его сторонам, задачу о вычислении сторон треугольника – по площади и двум углам и т.д. Так как любую вычислительную задачу геометрии можно свести к решению треугольников, то тригонометрия охватывает своими применениями всю планиметрию и стереометрию и широко применяется во всех отделах естествознания и техники.

Углы произвольного треугольника нельзя связать непосредственно с его сторонами с помощью алгебраических соотношений. Поэтому тригонометрия вводит в рассмотрение, кроме самих углов, еще новые количества, так называемые тригонометрические величины. Эти величины уже можно связать со сторонами треугольника простыми алгебраическими соотношениями. С другой стороны, по данному углу можно вычислить соответствующее значение тригонометрической величины, и обратно. Правда, эти вычисления требуют длительных и утомительных расчетов, но эта работа проделана раз и навсегда, и закреплена в таблицах.

Значение каждой тригонометрический величины изменяется с изменением угла, тригонометрическая величина есть функция угла. Отсюда наименование: тригонометрические функции.

Между различными тригонометрическими функциями существуют важные зависимости. Использование их позволяет сокращать и облегчать вычисления.

**Список литературы:**

1. Математика. В.Т.Лисичкин, И.Л.Соловейчик. Москва, «Высшая школа», 1991г.
2. Алгебра и начала анализа 10-11. Под редакцией А.Н.Колмогорова. Москва, «Просвещение», 1991г.
3. Алгебра и начала анализа, ч.1. Под редакцией Г.Н.Яковлева. Москва, «Наука», 1981г.
4. Справочник по математике для средних учебных заведений. А.Г.Цыпкин. Москва, «Наука», 1988г.
5. Справочник по элементарной математике. М.Я.Выгодский. Москва, Физматгиз, 1962г.
6. Практические занятия по математике. Н.В.Богомолов. Москва, «Высшая школа», 1990г.
7. Уроки по курсу «Алгебра и начала анализа – 10». М.П.Нечаев. Москва, «5 за задания», 2007г.

.