***Лекция***

***Тема:* Последовательности. Способы задания и свойства числовых последовательностей. Понятие о пределе последовательности.**

**Цели:** создание благоприятных условий для изучения понятия числовой последовательности; ввести определение предела последовательности и предела функции; познакомить с правилами вычисления пределов функции в точке и на бесконечности.

***Теоретический материаЛ***

**Определение№1:** *множество чисел, каждое из которых снабжено своим номером, называется числовой последовательностью.*

Элементы этого числового множества называются членами последовательности и обозначают: первый член - ***а* 1,** второй - ***а* 2** , n- й член - ***а* n** и т.д. Вся последовательность обозначается : ***а* 1, *а* 2, *а* 3, …, *а* n** или (***а* n** ).

Числовая последовательность представляет собой не что иное, как множество нумерованных чисел, упорядоченных наподобие натурального ряда, т.е. располагаемое в порядке возрастания номеров. Последовательность может содержать как конечное, так и бесконечное число членов.

*Последовательность, состоящая из конечного числа членов, называется конечной, а последовательность, состоящая из бесконечного числа членов, - бесконечной последовательностью.*

Иногда бесконечную числовую последовательность вводят, используя понятие функции:

**Определение №2:** *Функцию у = f(x), xN называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают: у = f(n), или у1, у2, у3..., уn или у(n).*

Последовательности можно задавать различными способами, например, ***словесно***, когда правило задавания последовательности описано словами, без указания формулы. Так, словесно задается последовательность простых чисел:

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,...

Особенно важны ***аналитический и рекуррентный*** способы задания последовательности.

Говорят, что последовательность задана ***аналитически***, если указана формула ее n-го члена.

***Приведем три примера.***

1. уn = n2. Это аналитическое задание последовательности

 1,4,9,16,…, n2, …

Указав конкретное значение n, нетрудно найти член последовательности с соответствующим номером. Если. Например, n= 9, то у9 = 92 = 81, если

1. уn = С. Здесь речь идет о последовательности С, С, С, …., С, …. . Такую последовательность называют **постоянной** (или стационарной).
2. уn = 2n . Это аналитическое задание последовательности 2, 22, 23, ….,2n, …

***Рекуррентный способ*** задания последовательности состоит в том, что указывают правило, позволяющее вычислить *n*- й член последовательности, если известны ее предыдущие члены. Например, **арифметическая прогрессия – это числовая последовательность (*а*n), заданная рекуррентно соотношениями:**

***а* 1, = *а*, *а*n+1 = *а*n+ *d***

**(***а* и *d – заданные числа, d – разность арифметической прогрессии***)**

**Геометрическая прогрессия –** это числовая последовательность (*b*n)? Заданная рекуррентно соотношениями:

*b* 1, = *b,* *b*n+1 = *b*n·*q*

**(***b* и *q – заданные числа, b≠0, q ≠ 0; q знаменатель геометрической прогресси прогрессии***).**

**Пример:** Выписать первые пять членов последовательности, заданной рекуррентно:у1 =1; у2 = 1; уn = уn-2 + уn-1

Решение. n –й член последовательности равен сумме двух предшествующих ему членов. Значит, последовательно получаем:

у1 =1; у2 = 1; у3 =1+1 = 2; у4 = 1+ 2 = 3; у5 =2+3 =5; и т.д.

**Ограниченные последовательности.**

* Последовательность (хn) называется ограниченной, если существуют такие два числа m и М, что для всех n*N* выполняется неравенство m≤ хn ≤М.
* Последовательность (хn) называется ограниченной сверху, если существует такое число М, что для всех n*N* выполняется неравенство хn ≤М.
* Последовательность (хn) называется ограниченной снизу, если существует такое число m, что для всех n*N* выполняется неравенство m≤ хn

Например: последовательность (хn), заданная формулой общего члена хn = n, ограничена снизу (например, число 0) и не ограничена сверху.

**Монотонные последовательности.**

Последовательность (хn) называется возрастающей, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т.е. если для любого натурального n выполняется неравенство хn+1 > хn.

Последовательность (хn) называется убывающей, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т.е. если для любого натурального n выполняется неравенство хn+1 < хn.

Последовательность (хn) называется невозрастающей, если каждый ее член, начиная со второго, не более предыдущего, т.е. если для любого натурального n выполняется неравенство хn+1 ≤ хn.

Последовательность (хn) называется неубывающей, если каждый ее член, начиная со второго, не меньше предыдущего, т.е. если для любого натурального n выполняется неравенство хn+1 ≥ хn.

Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности образуют класс *монотонных* последовательностей.

**Предел числовой последовательности.**

Рассмотрим для числовые последовательности – (*уn*) и (*xn*).

(*уn*): 1, 3,5, 7, 9, … 2n – 1, …;

(*xn*): 1, 

Изобразим члены этих последовательностей точками на координатной прямой.

**0 1 3 5 7 9 11 у**

**0 0,25 0,5 1**

Замечаем, что члены последовательности (*xn*) как бы «сгущаются» около точки 0 – говорят последовательность ***сходятся*** , а у последовательности (*уn*) такой точки сгущения нет – и говорят, что последовательность ***расходится.***

Математики не используют термин точка сгущения, а они говорят *предел последовательности.*

***Определение:*** *Число b называется пределом последовательности (уn), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержится все члены последовательности, начиная с некоторого номера.*

*Пишут так: уn→b или*  читают так: предел последовательности *уn при стремлении n к бесконечности равен b.*

На практике используется еще одно истолкование равенства , связанное с приближенными вычислениями: если последовательность *уn* = f(n) сходится к числу b, то выполняется приближенное равенство f(n)≈b, причем это приближенное равенство тем точнее, чем больше n.

**Необходимое условие сходимости произвольной числовой последовательности:**

Для того чтобы последовательность сходилась, необходимо, чтобы она была ограниченной.

**Достаточное условие сходимости последовательности**.

Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится. (теорема К.Вейерштрасса)

**Свойства сходящихся последовательностей**

1. Если последовательность сходится, то только к одному пределу.
2. Если последовательность сходится, то она ограничена.
3. Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.

***Если , то последовательность уn= qn расходится.***

**Теоремы о пределах последовательностей.**

1. 
2. Если 
3. Если , то
4. Для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение: 
5. Предел суммы равен сумме пределов: 
6. Предел произведения равен произведению пределов: 
7. Предел частного равен частному пределов: , где с≠0.
8. Постоянный множитель можно выносить за знак предела: 

***Нахождение пределов последовательности:***

Найти предел последовательности:

а) хn =  б) хn = в) 

Решение: а) применив правило «предел произведения», получим:



б) применим правило «предел суммы» и получим:



в) в подобных случаях применяют искусственный прием: делят числитель и знаменатель дроби почленно на наивысшую из имеющихся степень переменной n. В данном примере разделим числитель и знаменатель дроби почленно на n2 . Имеем:  (здесь мы применили правило «предел дроби»).

***Пределы функций. Нахождение пределов функции в точке и на бесконечности.***

Теория пределов позволяет определить характер поведения функции у = f(x) при заданном изменении аргумента.

Пусть функция f(х) определена в некоторой окрестности точки х =х0, за исключением, быть может, самой точки х0.

Число А называется пределом функции f(х) в точке х0, если для любого числа >0 найдется такое положительное число , что для любого х ** х0, удовлетворяющего неравенству | х - хо | <, выполняется соотношение | f(x) - А | < 

То, что функция f(x) в точке х0 имеет предел, равный А, обозначают следующим образом: ******

Геометрически существование данного предела означает, что каково бы ни было >0, найдется такое число , что для всех х, заключенных между х0 + , и х0 -  (кроме, быть может, самой точки хс), график функции у = f(x) лежит в полосе, ограниченной прямыми у = А + и у = А- (рис.1)



**Рисунок 1**

Таким образом, понятие предела функции дает возможность ответить на вопрос, к чему стремятся значения функции, когда значения аргумента стремятся к х0

Число А называют пределом функции f(x) при х, стремящимся к х0, если разность f(x) - А по абсолютной величине есть величина бесконечно малая.

******

**Практическое приложение темы «Предел функции в точке».**

1. Вычислите:

а)  б) в)  г) д);

2. Вычислите пределы следующих функций:

а)

б)

в).

3. Используя разложение на множители преобразовать дроби и вычислить предел функции в точке:

а)  б)  в)  г)  д)

е) ;

ж) ;

з).

4. Найти предел функции в точке, используя способ избавления знаменателя(числителя) от иррациональности (помножить на сопряженное выражение):
а) ; б) ; в) .

**Вопросы для самоконтроля**.

1. Сформулируйте определение предела функции в точке.
2. Повторите основные теоремы о пределах.
3. Повторите способы преобразования дробных выражений, используя материалы практических занятий, справочную литературу.
4. Вычислите пределы функции в точке:

а)  ; в) ;

б) ; г) .

а) ; б) ; в) ; г) ; д).

а);

а) .

***Контрольные вопросы:***

Дайте определение числовой последовательности.

Перечислите способы задания последовательностей.

Какие последовательности называют ограниченными?

Сформулируйте определение предела числовой последовательности.

Сформулируйте необходимые условия сходимости последовательности.

Сформулируйте достаточные условия сходимости последовательности

Дайте определение предела функции в точке.

Перечислите основные теоремы о пределах функции в точке.