

3.6. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

3.6.1. Общие уравнения прямой

В пространстве прямая обычно задается как линия пересечения двух плоскостей. Для этого уравнения этих плоскостей рассматриваются совместно в виде системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

При этом важно, чтобы плоскости, задаваемые этими уравнениями, пересекались, а не были параллельными или совпадающими. Две плоскости будут пересекаться по прямой тогда и только тогда, когда их векторы нормали \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 не коллинеарны. Учитывая условие коллинеарности двух векторов, получим, что плоскости будут пересекаться по прямой линии тогда и только тогда, когда координаты векторов $\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ не будут пропорциональны. (Напомним, что пропорциональность означает выполнение равенств $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.) Итак, если коэффициенты

в уравнениях двух плоскостей при переменных x, y и z не будут пропорциональны, то эти уравнения, рассмотренные совместно, определяют прямую в пространстве.

Определение 3.22. Уравнения (3.1) при выполнении указанных условий называются *общими уравнениями прямой* в пространстве.

Заметим, что одновременно обоим уравнениям удовлетворяют координаты тех и только тех точек, которые одновременно принадлежат как одной, так и другой плоскости, т.е. лежат на их линии пересечения, на прямой. Очевидно, что плоскостей, проходящих через фиксированную прямую, бесконечно много. Поэтому и общие уравнения прямой могут быть сформированы бесконечным числом способов: достаточно взять уравнения любых двух различных плоскостей, проходящих через эту прямую.

Рассмотрим такое понятие, как *пучок плоскостей*. Это множество всех плоскостей, проходящих через одну фиксированную прямую. Оказывается, что любая плоскость из этого множества может быть получена из общей формулы

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (3.2)$$

за счет выбора соответствующих значений параметров α и β . Поэтому уравнение (3.2) называется *уравнением пучка плоскостей*. При любых значениях α и β , одновременно не равных нулю, уравнение (3.2) дает уравнение плоскости, проходящей через фиксированную прямую, но для каждой такой плоскости соответствующие значения параметров α и β определяются неоднозначно. Если предположить,

что $\beta \neq 0$, то вводя новый параметр $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$, уравнению (3.2) можно придать следующий вид:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \quad (3.3)$$

В этой форме уравнение пучка зависит от одного параметра λ , что оказывается более удобным при решении задач, но из всего пучка выпадает одна плоскость, имеющая уравнение $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ (это соответствует случаю $\beta = 0$). Если про это обстоятельство не забывать, то можно пользоваться уравнением пучка плоскостей в форме (3.3).

Пример 3.14. Через прямую, заданную общими уравнениями

$$\begin{cases} x - 3y + 5z - 3 = 0; \\ 2x + y - 3z - 5 = 0, \end{cases}$$

надо провести плоскость, проходящую через точку $M(2, 1, 1)$.

Решение. Искомая плоскость принадлежит пучку плоскостей, проходящих через данную прямую. Запишем уравнение пучка в форме (3.3):

$$\lambda(x - 3y + 5z - 3) + (2x + y - 3z - 5) = 0.$$

Проверим, что плоскость, заданная уравнением $x - 3y + 5z - 3 = 0$, не дает решения задачи. Действительно, подстановка координат точки $M(2, 1, 1)$ в это уравнение показывает, что оно не удовлетворяется, и, следовательно, данная плоскость не проходит через точку M , т. е. не является решением поставленной задачи. Подставив координаты точки M в уравнение пучка, получим

$$\lambda(2 - 3 + 5 - 3) + (4 + 1 - 3 - 5) = 0.$$

Решая уравнение относительно неизвестного значения параметра λ , находим $\lambda = 3$. Следовательно, искомую плоскость можно определить из уравнения пучка, если параметру λ придать значение $\lambda = 3$. В итоге уравнение искомой плоскости имеет вид

$$5x - 8y + 12z - 14 = 0.$$

3.6.2. Канонические уравнения прямой в пространстве

Определение 3.23. Ненулевой вектор $\mathbf{a} = \{p, q, r\}$, коллинеарный прямой L , называется *направляющим вектором* этой прямой.

Как следует из определения, у прямой существует бесконечно много направляющих векторов. Например, если имеется один направляющий вектор, то умножив его на число, отличное от нуля, получим снова направляющий вектор этой прямой. Поскольку различных чисел бесконечно много, то и направляющих векторов тоже будет бесконечно много. С другой стороны, все направляющие векторы коллинеарны прямой L , а следовательно, коллинеарны друг другу. Откуда следует, что для любых двух направляющих векторов \mathbf{a} и $\tilde{\mathbf{a}}$ найдется число μ ($\mu \neq 0$) такое, что $\mathbf{a} = \mu \tilde{\mathbf{a}}$.

Пусть $\mathbf{a} = \{p, q, r\}$ — направляющий вектор прямой L , а $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка на этой прямой. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$. Точка $M(x, y, z)$ будет лежать на прямой L тогда и только тогда, когда вектор $\mathbf{M}_0\mathbf{M}$ будет коллинеарен этой прямой или, что то же, коллинеарен направляющему вектору $\mathbf{a} = \{p, q, r\}$. Вектор $\mathbf{M}_0\mathbf{M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, и условие его коллинеарности вектору $\mathbf{a} = \{p, q, r\}$ можно записать в виде

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}. \quad (3.4)$$

Таким образом, точка $M(x, y, z)$ будет лежать на прямой L тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнениям (3.4). Поэтому естественно назвать эти уравнения уравнениями прямой L .

Определение 3.24. Уравнения (3.4) называются *каноническими уравнениями* прямой L .

Если известны канонические уравнения прямой, то из них сразу можно получить направляющий вектор прямой и координаты точки M_0 , принадлежащей этой прямой. Эта информация часто оказывается полезной при решении задач. В отличие от канонических уравнений прямой общие уравнения не содержат явно этой информации. Поэтому при решении ряда задач приходится дополнительно затрачивать усилия на ее получение из общих уравнений. Это можно сделать, например, по следующей схеме. Поскольку в общих уравнениях прямой, как было показано, коэффициенты при переменных x, y, z не пропорциональны, т. е. не все отношения коэффициентов $\frac{A_1}{A_2}, \frac{B_1}{B_2}, \frac{C_1}{C_2}$ равны между собой, то найдется пара

неравных отношений. Пусть, например, $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Тогда систему уравнений (3.1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z - D_1; \\ A_2x + B_2y = -C_2z - D_2. \end{cases}$$

Дадим z какое-либо значение $z = z_1$. Тогда правая часть системы будет иметь конкретные значения, и относительно переменных x и y получится система двух уравнений с двумя неизвестными с определителем, не равным нулю ($A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, так как $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$).

По правилу Крамера однозначно находятся координаты x_1 и y_1 , соответствующие значению $z = z_1$. Тем самым оказалось найденным одно из решений системы (3.1), т. е. координаты точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, лежащей на прямой L . Если теперь дать переменному z другое значение $z = z_2, z_2 \neq z_1$, то будет найдена тем же способом вторая точка на прямой $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Зная две точки на прямой, находим направляющий вектор прямой:

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

Таким образом, задача нахождения координат точки на прямой и ее направляющего вектора решена.

Пример 3.15. Прямая L задана общими уравнениями

$$\begin{cases} x - y + z - 10 = 0; \\ 2x - 8y - z - 23 = 0, \end{cases}$$

и пусть требуется написать канонические уравнения этой прямой.

Решение. Поскольку определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} x - y = -z + 10; \\ 2x - 8y = z + 23. \end{cases}$$

Задаем значение $z = 1$ и решаем получающуюся систему по правилу Крамера. Имеем

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 24 & -8 \end{vmatrix} = -48; \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 24 \end{vmatrix} = 6; \Delta = -6.$$

Таким образом, $x_1 = 8, y_1 = -1, z_1 = 1$ и $M_1(8, -1, 1)$.

Теперь задаем другое значение: $z = 5$, и снова решаем получающуюся систему, которая имеет вид

$$\begin{cases} x - y = 5; \\ 2x - 8y = 28. \end{cases}$$

Имеем

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 28 & -8 \end{vmatrix} = -12; \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 28 \end{vmatrix} = 18; \Delta = -6.$$

В итоге получается вторая точка $M_2(2, -3, 5)$. Зная координаты двух точек на прямой, находим направляющий вектор:

$$\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = \{2 - 8, -3 + 1, 5 - 1\} = \{-6, -2, 4\}.$$

Теперь, зная координаты направляющего вектора и одной из точек, пишем канонические уравнения прямой

$$\frac{x - 8}{-6} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z - 1}{4}.$$

Канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, исходя из разобранных примеров, могут быть написаны для любых двух точек. Очевидно, что они имеют следующий вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (3.5)$$

Если в знаменателе какой-либо дроби оказалось число, равное нулю, то в соответствии с соглашением о пропорциональности координат векторов считаем, что соответствующий числитель тоже равен нулю. Например, если $x_2 = x_1$, то канонические уравнения прямой будут иметь вид

$$x = x_1 = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Если же выполняются два равенства: $x_2 = x_1$ и $y_2 = y_1$, то канонические уравнения прямой будут иметь вид

$$x = x_1, y = y_1$$

(z принимает любые значения, а это означает, что прямая параллельна оси OZ).

3.6.3. Параметрические уравнения прямой в пространстве

Если, имея канонические уравнения прямой, ввести в рассмотрение параметр t следующим образом:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r} = t,$$

то текущие координаты точки на прямой становятся функциями этого параметра:

$$x = x_0 + pt; y = y_0 + qt; z = z_0 + rt; -\infty < t < +\infty. \quad (3.6)$$

Если имеются координаты какой-либо точки на прямой, то из уравнений (3.6) однозначно находится соответствующее этой точке значение параметра t . И наоборот, зная значение параметра t , по уравнениям (3.6) однозначно находятся координаты точки. Таким

образом, каждой точке на прямой соответствует единственное значение параметра t , и каждому значению параметра t соответствует единственная точка на прямой.

Определение 3.25. Уравнения (3.6) называются *параметрическими уравнениями прямой*.

Очевидно, что переход от параметрических уравнений прямой к каноническим и наоборот не представляет никаких трудностей. По сравнению с каноническими параметрические уравнения при решении ряда задач имеют преимущества, продемонстрируем это на примере.

Пример 3.16. В пространстве две прямые, если они не параллельны, не обязаны пересекаться. Они могут, как говорится, *скрещиваться*, т. е. лежать в двух параллельных плоскостях и не быть друг другу параллельными. В этом случае существует прямая, которая перпендикулярна этим двум плоскостям и пересекает обе прямые. Эта прямая называется *общим перпендикуляром* к двум скрещивающимся прямым. Пусть первая прямая L_1 имеет канонические уравнения

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{-1},$$

а вторая прямая L_2 —

$$\frac{x-8}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{1}.$$

Необходимо написать канонические уравнения общего перпендикуляра к этим двум прямым.

Решение. Перейдем к параметрическим уравнениям этих прямых. Для прямой L_1 получим

$$x = 1 + 2t; y = 5 + 2t; z = 1 - t.$$

Параметр для прямой L_2 обозначим буквой s . Тогда параметрические уравнения прямой L_2 будут иметь вид

$$x = 8 + 3s; y = 2 + 4s; z = 5 + s.$$

Пусть точка M находится на прямой L_1 , и ей соответствует значение параметра t , а точка N находится на прямой L_2 , и ей соответствует значение параметра s . Рассмотрим вектор

$$\overrightarrow{MN} = \{7 + 3s - 2t, -3 + 4s - 2t, 4 + s + t\}.$$

Этот вектор будет коллинеарен общему перпендикуляру к обеим прямым тогда и только тогда, когда он будет перпендикулярен каждой из прямых L_1 и L_2 , или, что то же самое, направляющим векторам этих прямых. Используя условия перпендикулярности векторов, получим два уравнения

$$(7 + 3s - 2t)(2) + (-3 + 4s - 2t)(2) + (4 + s + t)(-1) = 0;$$

$$(7 + 3s - 2t)(3) + (-3 + 4s - 2t)(4) + (4 + s + t)(1) = 0.$$

Преобразуя их, получим систему двух уравнений

$$\begin{cases} 13s - 9t = -4; \\ 26s - 13t = -13, \end{cases}$$

единственное решение которой имеет вид $s = -1; t = -1$. Зная значения параметров, находим координаты точек $M(-1, 3, 2)$ и $N(5, -2, 4)$. По формулам (3.5) получаем уравнения общего перпендикуляра:

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-2}{2}.$$