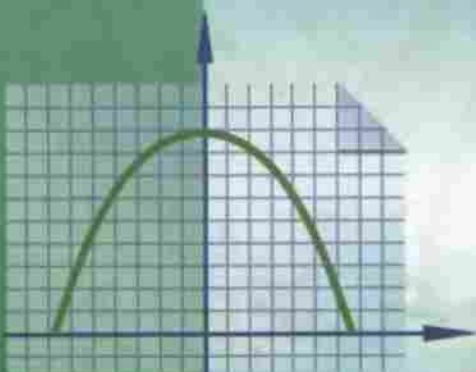
Ю. М. Колягин,
Ю. В. Сидоров, М. В. Ткачева,
Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин

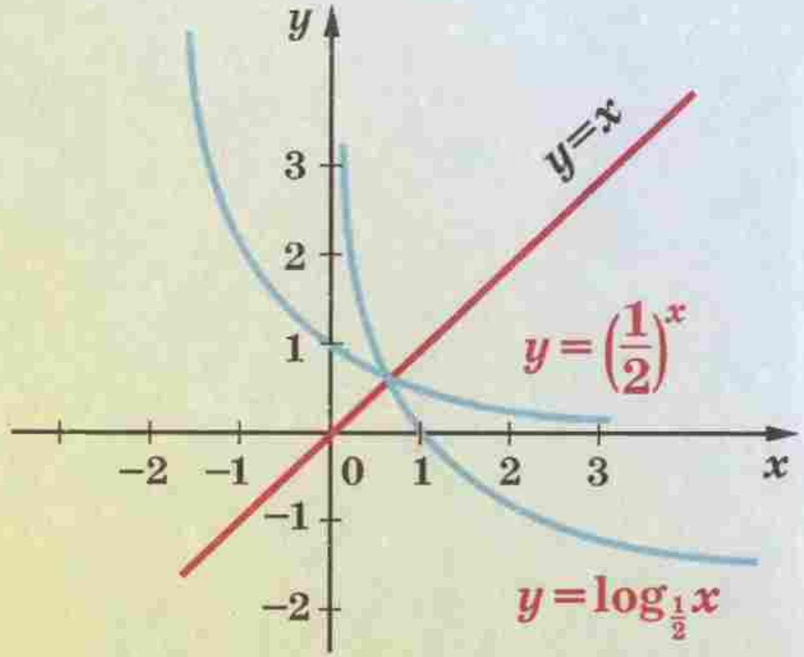
Алгебра
и начала математического анализа

10

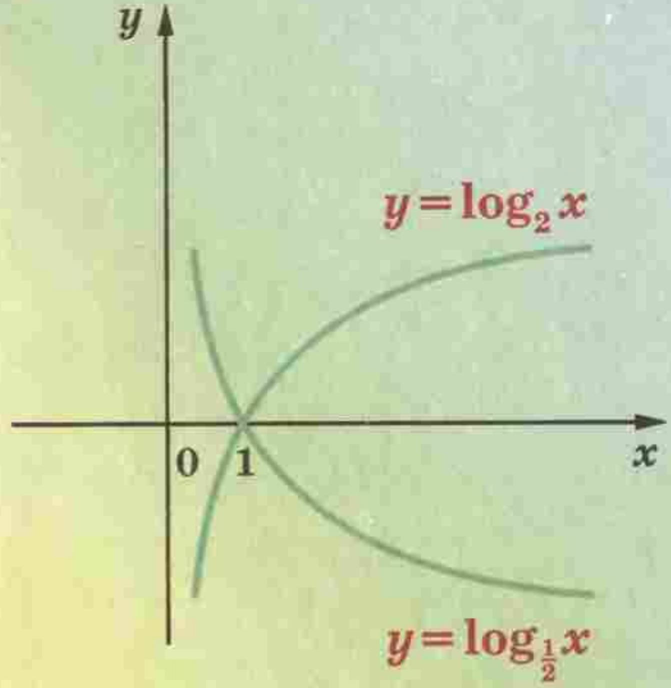
Профильный уровень



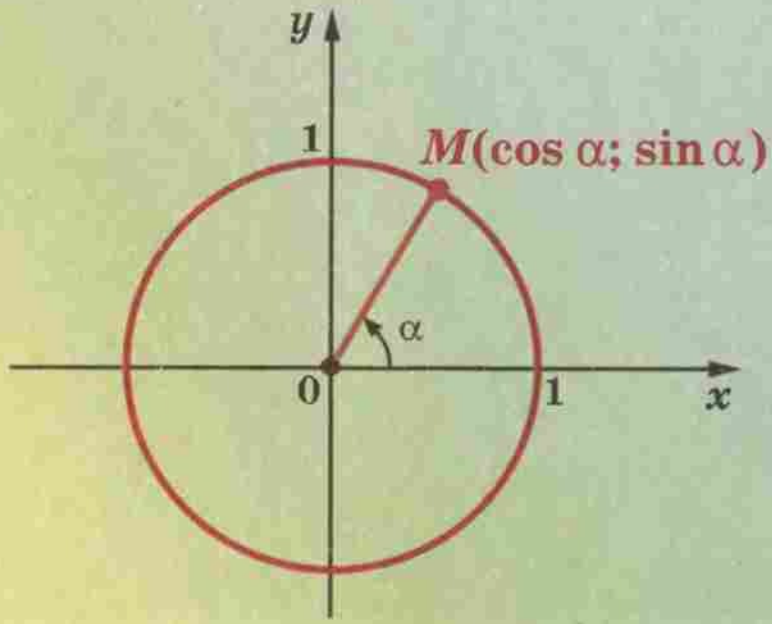
МНЕМОЗИНА



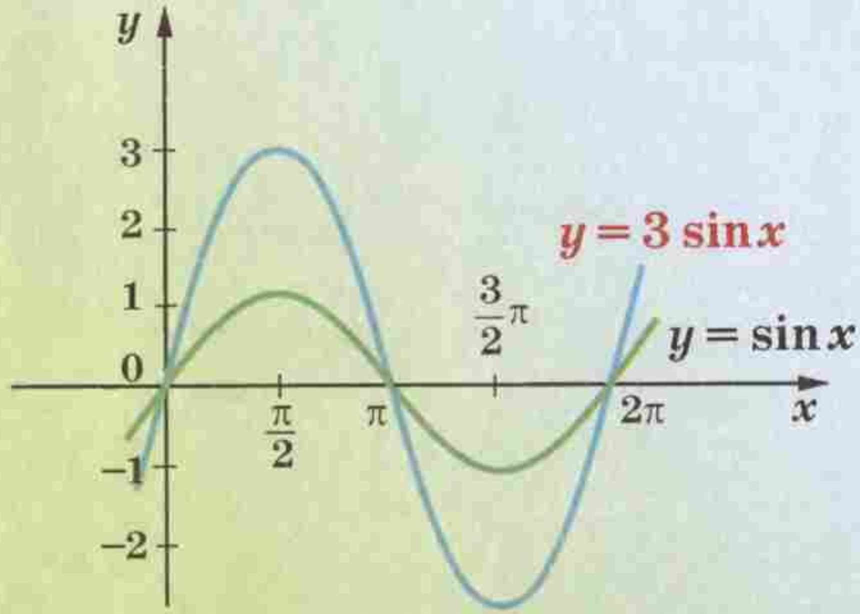
y
y=x
3
2
1
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
−2 −1 0 1 2 3
x
−1
−2
$y=\log_{\frac{1}{2}}x$



y
$y=\log_2 x$
0 1
x
$y=\log_{\frac{1}{2}}x$



y
1
M(cos α; sin α)
α
0
1
x



y
3
2
$y=3\sin x$
1
$\frac{3}{2}\pi$
$y=\sin x$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
2π
x
−1
−2

Ю. М. Колягин,
Ю. В. Сидоров, М. В. Ткачева,
Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин

Алгебра
и начала математического анализа

УЧЕБНИК
для учащихся
общеобразовательных
учреждений

10

Профильный уровень

*Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации*

8-е издание, стереотипное

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

Москва 2009

УДК 373.167.1:512+517.1
ББК 22.141я721+22.161я721
К62

Колягин Ю. М.

К62 Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин. — 8-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2009. — 366 с. : ил.

ISBN 978-5-346-01315-0

В учебнике представлен в целостном виде раздел по тригонометрии. Много внимания уделяется алгебраическим, показательным, логарифмическим и тригонометрическим примерам и задачам различного уровня сложности для самостоятельного решения.

Разделы «Производная» и «Интеграл» изложены в учебнике для 11-го класса.

УДК 373.167.1:512+517.1
ББК 22.141я721+22.161я721

© «Мнемозина», 2001
© «Мнемозина», 2009
© Оформление. «Мнемозина», 2009
Все права защищены

ISBN 978-5-346-01315-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный учебник является первой частью курса «Алгебра и начала математического анализа» для 10—11-го классов средних общеобразовательных учреждений различного типа, в которых на изучение математики отводится 4—5 часов в неделю.

В новом учебнике изложены элементы теории действительного числа, представленного в виде бесконечной десятичной дроби. В целостном виде также представлен раздел тригонометрии, начиная с определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла и кончая решением тригонометрических неравенств и изучением обратных тригонометрических функций. Широко представлены разные типы тригонометрических уравнений и методы их решения (уравнения, сводящиеся к алгебраическим; линейные уравнения относительно $\sin x$ и $\cos x$; уравнения, содержащие корни и модули; метод разложения на множители, метод замены неизвестного, метод оценки левой и правой частей уравнения). Включена глава, в которой изложены основные методы решения систем уравнений (рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических и др.), приведены примеры решения текстовых задач с помощью систем уравнений. Кроме того, отдельная глава посвящена изучению степенной функции, где рассматриваются вопросы, связанные с понятиями обратной функции, равносильности и следствия. В каждой главе учебника имеется краткая историческая справка.

Наконец, важная особенность учебника — расширенная система задач и упражнений с учетом уровневой дифференциации обучения и потребностей учащихся в получении знаний, необходимых для поступления в вузы.

Для удобства учителей и учащихся в тексте книги выделены:

1) названия параграфов, материал которых обычно изучается учащимися, проявляющими повышенный интерес к математике;

2) номера задач в тексте и в конце параграфов, для решения которых требуется применение различных приемов и методов, не входящих в перечень обязательных для всех учащихся.

Упражнения «до черты», расположенные после каждого параграфа, соответствуют обязательному уровню усвоения материала;

упражнения «за чертой» — продвинутому уровню усвоения. Задачи повышенной трудности обозначены одной или двумя звездочками.

В учебнике для 11-го класса наряду с традиционными разделами курса «Алгебра и начала математического анализа» (производная и ее применение, интеграл) представлены главы, связанные с изучением комплексных чисел, элементов комбинаторики и теории вероятностей.

Авторы

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ:

△ Начало решения задачи

▲ Окончание решения задачи

○ Начало обоснования утверждения или вывода формулы

● Окончание обоснования или вывода

ГЛАВА I

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. СТЕПЕНЬ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

§ 1. Рациональные числа

Напомним и систематизируем те сведения о действительных числах, с которыми вы уже знакомы. Изучение математики вы начали с *натуральных чисел*, т.е. с чисел 1, 2, 3, 4, 5, ...

При сложении и умножении натуральных чисел всегда получаются натуральные числа. Однако их разность и частное могут не быть натуральными числами.

Добавлением к натуральным числам отрицательных чисел и нуля множество натуральных чисел расширяется до множества целых чисел, т.е. 0, ±1, ±2 , ±3, ...

Для любых целых чисел их разность является целым числом. Однако частное двух целых чисел может не быть целым числом.

Введение *рациональных чисел*, т.е. чисел вида $\frac{m}{n}$, где m — целое и n — натуральное, позволило находить частное двух рациональных чисел при условии, что делитель не равен нулю. Заметим, что каждое целое число m является рациональным, так как его можно представить в виде $\frac{m}{1}$.

Итак, при выполнении четырех арифметических действий (кроме деления на нуль) над рациональными числами всегда получаются рациональные числа.

Если рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{m}{10^k}$, где m — целое и k — натуральное, то его можно записать в виде конечной десятичной дроби. Например, число $\frac{327}{100}$ можно записать так: 3,27; число $-\frac{23}{10}$ можно записать так: −2,3.

Существуют рациональные числа, которые нельзя записать в виде конечной десятичной дроби, например $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{9}$, $\frac{3}{7}$.

Если попытаться записать число $\frac{1}{3}$ в виде десятичной дроби, используя известный алгоритм деления уголком, то получится бесконечная десятичная дробь 0,333... .

Бесконечную десятичную дробь 0,333... называют периодической, повторяющуюся цифру 3 — ее периодом и кратко записывают так: 0,(3); читается: «Нуль целых и три в периоде».

Вообще *периодическая дробь* — это бесконечная десятичная дробь, у которой, начиная с некоторого десятичного знака, повторяется одна и та же цифра или несколько цифр — *период дроби.*

Например, десятичная дробь $23{,}14565656\ldots = 23{,}14(56)$ — периодическая с периодом 56; читается: «23 целых, 14 сотых и 56 в периоде».

З а д а ч а 1. Записать число $\frac{27}{11}$ в виде бесконечной десятичной дроби.

Δ Воспользуемся алгоритмом деления уголком:

$$
\begin{array}{rl}
-\,27 & \vert\, 11 \\
\underline{22} & \vert\, \overline{2{,}4545\ldots} \\
-\,50 & \\
\underline{44} & \\
-\,60 & \\
\underline{55} & \\
-\,50 & \\
\underline{44} & \\
6\ldots &
\end{array}
$$

Остатки повторяются, поэтому в частном повторяется одна и та же группа цифр: 45. Следовательно, $\frac{27}{11} = 2{,}4545\ldots = 2{,}(45)$. ▲

Отметим, что при делении целого числа m на натуральное число n всегда получается бесконечная периодическая десятичная дробь, так как каждый из остатков меньше n и поэтому при дальнейшем делении в частном будет повторяться одна и та же группа цифр. Так, период может быть равен нулю, т.е. может получиться целое число или конечная десятичная дробь.

Например:

$$-\frac{36}{6} = -6 = -6{,}000\ldots; \quad \frac{1}{5} = 0{,}2 = 0{,}2000\ldots;$$

$$\frac{-15}{4} = -3{,}75 = -3{,}75000\ldots; \quad 0 = 0{,}000\ldots .$$

Вообще *каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.*

Справедливо и обратное утверждение: *каждая бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом,* так как может быть представлена в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое, а n — натуральное числа.

З а д а ч а 2. Представить бесконечную периодическую десятичную дробь 0,2(18) в виде обыкновенной.

Δ Пусть $x = 0{,}2(18) = 0{,}2181818\ldots$.

Так как в записи этого числа до периода содержится только один десятичный знак, то, умножая на 10, получаем:

$$10x = 2{,}181818\ldots \,. \qquad (1)$$

Период этой дроби состоит из двух цифр. Поэтому, умножая обе части последнего равенства на $10^2 = 100$, находим:

$$1000x = 218{,}181818\ldots \,. \qquad (2)$$

Вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем: $990x = 216$. Отсюда: $x = \frac{216}{990} = \frac{12}{55}$.

О т в е т: $0{,}2(18) = \frac{12}{55}$. ▲

З а д а ч а 3. Показать, что $2{,}999\ldots = 3$.

Δ Пусть $x = 2{,}(9)$. Тогда $10x - x = 29{,}(9) - 2{,}(9) = 27$, откуда: $x = 3$. ▲

Аналогично можно показать, что любую конечную десятичную дробь можно записать в виде бесконечной дроби двумя способами: с периодом 0 и с периодом 9.

Например:

$1{,}75 = 1{,}75000\ldots = 1{,}74999\ldots$, $-0{,}2 = -0{,}2000\ldots = -0{,}199999\ldots$.

Условимся в дальнейшем не использовать бесконечные десятичные дроби с периодом 9. Вместо таких дробей будем записывать конечные десятичные дроби или бесконечные десятичные дроби с периодом 0.

Например: $5{,}2999\ldots = 5{,}30000\ldots = 5{,}3$.

Упражнения

1. Записать в виде конечной (если это возможно) или бесконечной периодической десятичной дроби:

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{11}$; 3) $\frac{3}{5}$; 4) $-\frac{1}{4}$; 5) $-3\frac{1}{7}$; 6) $\frac{10}{101}$.

2. Выполнить действия и записать результат в виде конечной или бесконечной десятичной дроби:

1) $\frac{2}{11} + \frac{1}{9}$; 2) $\frac{7}{37} + \frac{2}{3}$; 3) $\frac{1}{3} + 1{,}25$; 4) $\frac{1}{9} + 0{,}33$;

5) $\frac{3}{14} \cdot 1{,}05$; 6) $\frac{7}{9} \cdot 3{,}7$.

3. Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную периодическую десятичную дробь:

1) 0,(6); 3) 0,1(2); 5) −3,(27);
2) 1,(45); 4) −0,(7); 6) −2,3(32).

4. Вычислить:

1) $(5{,}4 \cdot 1{,}2 - 3{,}7 : 0{,}8)(3{,}14 + 0{,}86) : 0{,}25$;
2) $(20{,}88 : 18 + 45 : 0{,}36) : (19{,}59 + 11{,}95)$;
3) $(3{,}14 : (8{,}7 - 2{,}42) + 5{,}2) : (7{,}86 - 0{,}26\,(1{,}38 + 28{,}12))$;
4) $\left(5\frac{8}{9} - 3\frac{11}{12}\right) \cdot \frac{18}{71} - 7\frac{5}{6} : 15\frac{2}{3}$;
5) $\frac{7}{36} \cdot 9 + 8 \cdot \frac{11}{32} + \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{18}$.

5. Вычислить:

1) $\left(6\frac{5}{6} - 4\frac{7}{8}\right) \cdot 3\frac{3}{4}\left(\frac{19}{20} - \frac{13}{18}\right) \cdot 28\frac{4}{41}$;
2) $\left(\frac{5}{16} + \frac{5}{72} + \frac{5}{12}\right) \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{23} + 1\frac{1}{115}\right) : \left(\frac{7}{18} - \frac{7}{24}\right)$;
3) $\left(3\frac{4}{25} + 0{,}24\right) \cdot 2{,}15 + \left(5{,}1625 - 2\frac{3}{16}\right) \cdot \frac{2}{5}$;
4) $0{,}364 : \frac{7}{25} + \frac{5}{16} : 0{,}125 + 2\frac{1}{2} \cdot 0{,}8$;
5) $\dfrac{\left(3{,}25 - \frac{3}{4}\right) \cdot 6{,}25}{(2 - 0{,}75) : \frac{4}{5}} + \dfrac{\left(5{,}5 - 3\frac{3}{4}\right) : 5}{(2 - 0{,}8) \cdot 1\frac{3}{4}}$.

§ 2. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Напомним: геометрической прогрессией называется такая числовая последовательность $b_1; b_2; b_3; \ldots; b_n; \ldots$, что для всех натуральных n выполняется равенство

$$b_{n+1} = b_n q,$$

где $b_n \neq 0$, $q \neq 0$. Например, таковы последовательности:

$$1;\ 3;\ 9;\ 27;\ \ldots;\ 3^{n-1};\ \ldots\quad (b_1 = 1,\ q = 3);$$

$$1; \frac{1}{5}; \frac{1}{25}; \frac{1}{125}; \ldots; \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}; \ldots\quad \left(b_1 = 1, q = \frac{1}{5}\right);$$

$$2;\ -4;\ 8;\ -16;\ \ldots;\ -(-2)^n;\ \ldots\quad (b_1 = 2,\ q = -2).$$

По формуле

$$\boxed{b_n = b_1 q^{n-1}}$$

вычисляется n-й член геометрической прогрессии, а по формуле

$$\boxed{S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}}$$

сумма ее первых n членов, если $q \neq 1$.

Среди геометрических прогрессий особый интерес представляют *бесконечно убывающие* прогрессии.

Вначале рассмотрим квадраты, изображенные на рисунке 1. Сторона первого квадрата равна 1, сторона второго $\frac{1}{2}$, сторона третьего $\frac{1}{2^2}$ и т.д. Таким образом, стороны квадрата образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{2}$:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots. \qquad (1)$$

Площади этих квадратов образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{4}$:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \ldots, \frac{1}{4^{n-1}}, \ldots. \qquad (2)$$

Из рисунка 1 видно, что стороны квадратов и их площади с возрастанием номера n становятся все меньше, приближаясь к нулю. Поэтому прогрессии (1) и (2) называются бесконечно убывающими. Отметим, что у этих прогрессий знаменатели меньше единицы.

Рассмотрим теперь геометрическую прогрессию

$$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, -\frac{1}{3^3}, \ldots, \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}, \ldots. \qquad (3)$$

Знаменатель этой прогрессии $q = -\frac{1}{3}$, а ее члены $b_1 = 1$, $b_2 = -\frac{1}{3}$, $b_3 = \frac{1}{9}$, $b_4 = -\frac{1}{27}$ и т.д.

С возрастанием номера n члены этой прогрессии приближаются к нулю. Прогрессию (3) также называют бесконечно убывающей. Отметим, что модуль ее знаменателя меньше единицы: $|q| < 1$.

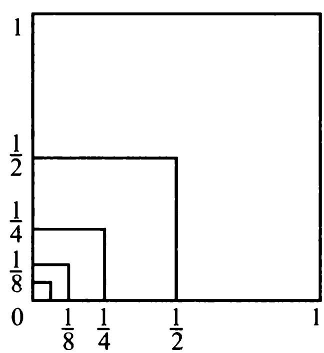


Рис. 1

Геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей*, если модуль ее знаменателя меньше единицы.

Задача 1. Доказать, что геометрическая прогрессия, заданная формулой n-го члена $b_n = \frac{3}{5^n}$, является бесконечно убывающей.

Δ По условию $b_1 = \frac{3}{5}$, $b_2 = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$, откуда $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{5}$.

Так как $|q| < 1$, то данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей. ▲

На рисунке 2 изображен квадрат со стороной 1. Отметим штриховкой его половину, затем половину оставшейся части и т.д. Площади заштрихованных прямоугольников образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

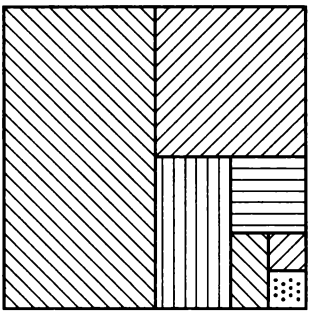


Рис. 2

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots.$$

Если заштриховать все получающиеся таким образом прямоугольники, то штриховкой покроется весь квадрат. Естественно считать, что сумма площадей всех заштрихованных прямоугольников равна 1, т.е.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 1.$$

В левой части этого равенства стоит сумма бесконечного числа слагаемых. Рассмотрим сумму первых n слагаемых:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}.$$

По формуле суммы n членов геометрической прогрессии имеем

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Если n неограниченно возрастает, то $\frac{1}{2^n}$ как угодно близко приближается к нулю (стремится к нулю). В этом случае пишут:

$$\frac{1}{2^n} \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ или } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

(читается: «$\frac{1}{2^n}$ стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности» или: «предел $\frac{1}{2^n}$ при n, стремящемся к бесконечности, равен нулю»).

Так как $\frac{1}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$, то $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \to 1$ при $n \to \infty$, т.е. $S_n \to 1$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 1$. Поэтому бесконечную сумму $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$ считают равной 1.

Говорят, что сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии есть предел последовательности S_1; S_2; S_3; ...; S_n; ... .

Например, для прогрессии

$$1; -\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; -\frac{1}{27}; \ldots; \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}; \ldots,$$

где $b_1 = 1$, $q = -\frac{1}{3}$, имеем

$$S_1 = 1; S_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}; S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}; \ldots;$$

$$S_n = \frac{1 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n; \ldots .$$

Поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{3}{4}$, так как $\lim\limits_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

Выведем *формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии*.

Воспользуемся формулой $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Запишем ее так:

$$S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} \cdot q^n. \tag{4}$$

Так как $|q| < 1$, то $q^n \to 0$, если n неограниченно возрастает. Поэтому $\frac{b_1}{1-q} \cdot q^n$ также стремится к нулю при $n \to \infty$. Первое слагаемое в формуле (4) не зависит от n. Следовательно, S_n стремится к числу $\frac{b_1}{1-q}$ при $n \to \infty$.

Таким образом, сумма S бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна

$$\boxed{S = \frac{b_1}{1-q}.} \tag{5}$$

В частности, при $b_1 = 1$ получаем $S = \frac{1}{1-q}$. Это равенство обычно записывают так:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1-q}.$$

Подчеркнем, что это равенство и равенство (5) справедливы только при $|q| < 1$.

З а д а ч а 2. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{54}, \ldots$.

Δ Так как $b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = -\frac{1}{6}$, то $q = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{1}{3}$, и по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ получим

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{8}. \ \blacktriangle$$

З а д а ч а 3. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_3 = -1$, $q = \frac{1}{7}$.

Δ Применяя формулу $b_n = b_1 q^{n-1}$, при $n = 3$ получаем $-1 = b_1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{3-1}$, $-1 = b_1 \cdot \frac{1}{49}$, откуда $b_1 = -49$.

По формуле (5) находим сумму S

$$S = \frac{-49}{1-\frac{1}{7}} = -57\frac{1}{6}. \ \blacktriangle$$

З а д а ч а 4. Пользуясь формулой (5), записать бесконечную периодическую десятичную дробь $a = 0{,}(15) = 0{,}151515\ldots$ в виде обыкновенной дроби.

Δ Составим последовательность приближенных значений данной бесконечной дроби:

$$a_1 = 0{,}15 = \frac{15}{100},$$

$$a_2 = 0{,}1515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2},$$

$$a_3 = 0{,}151515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3}.$$

Запись приближений показывает, что данную периодическую дробь можно представить в виде суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\dot{a} = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + \ldots.$$

По формуле (5) получим

$$a = \frac{\frac{15}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}. \ \blacktriangle$$

Упражнения

6. Является ли геометрической прогрессией последовательность, заданная формулой n-го члена:

1) $b_n = -2^{2n}$; 2) $b_n = 3^{3n}$?

7. В геометрической прогрессии найти сумму ее первых пяти членов, если:

1) $b_4 = 88$, $q = 2$; 2) $b_1 = 11$, $b_4 = 88$.

8. Доказать, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$; 3) $-81, -27, -9, \ldots$;

2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$; 4) $-16, -8, -4, \ldots$.

9. Выяснить, является ли геометрическая прогрессия бесконечно убывающей, если:

1) $b_1 = 40$, $b_2 = -20$; 3) $b_7 = -30$, $b_6 = 15$;

2) $b_7 = 12$, $b_{11} = \frac{3}{4}$; 4) $b_5 = -9$, $b_9 = -\frac{1}{27}$.

10. Вычислить:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4^n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} (0{,}2)^n$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n - 2\right)$.

11. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $q = \frac{1}{2}, b_1 = \frac{1}{8}$; 3) $q = \frac{1}{3}, b_5 = \frac{1}{81}$;

2) $q = -\frac{1}{3}, b_1 = 9$; 4) $q = -\frac{1}{2}, b_4 = -\frac{1}{8}$.

12. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$; 2) $6, 1, \frac{1}{6}, \ldots$; 3) $-25, -5, -1, \ldots$; 4) $-7, -1, -\frac{1}{7}, \ldots$.

13. Записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:

1) 0,(5); 2) 0,(9); 3) 0,(12); 4) 0,2(3).

---

14. Является ли последовательность бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если она задана формулой n-го члена:

1) $b_n = 3 \cdot (-2)^n$; 3) $b_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$;

2) $b_n = -3 \cdot 4^n$; 4) $b_n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$?

15. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $12,\ 4,\ \frac{4}{3},\ \ldots;$ 2) $100,\ -10,\ 1,\ \ldots.$

16. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $q=\frac{1}{2}, b_5=\frac{\sqrt{2}}{16};$ 2) $q=\frac{\sqrt{3}}{2}, b_5=\frac{9}{8}.$

17. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 150. Найти:

1) b_1, если $q=\frac{1}{3};$ 2) q, если $b_1=75.$

18*. Вычислить:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3-2^n}{2^n}\right);$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(5^n+1)^2}{5^{2n}};$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+2}+2}{3^n}\right);$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2^n-3)(2^{2n}+3\cdot 2^n+9)}{3\cdot 2^{3n}}.$

19*. На куб со стороной a поставили куб со стороной $\frac{a}{2}$, на него куб со стороной $\frac{a}{4}$, затем куб со стороной $\frac{a}{8}$ и т.д. (рис. 3). Найти высоту получившейся фигуры.

20*. В угол, равный 60°, последовательно вписаны окружности, касающиеся друг друга (рис. 4). Радиус первой окружности R_1. Найти радиусы $R_2, R_3, \ldots, R_n, \ldots$ остальных окружностей и показать, что они образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Доказать, что сумма $R_1+2(R_2+R_3+\ldots+R_n+\ldots)$ равна расстоянию от центра первой окружности до вершины угла.

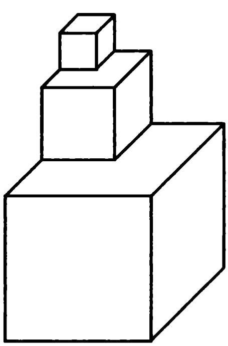


Рис. 3

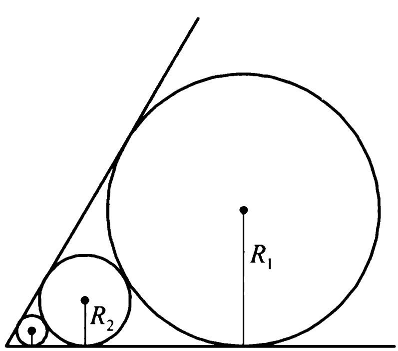


Рис. 4

§ 3. Действительные числа

В § 1 было показано, что любое рациональное число можно записать в виде бесконечной периодической десятичной дроби и каждая бесконечная десятичная периодическая дробь — рациональное число. Если же бесконечная десятичная дробь не периодическая, то она не является рациональным числом. Например, дробь 0,101001000100001..., в которой после первой цифры 1 стоит один нуль, после второй цифры 1 — два нуля и вообще после n-й цифры 1 стоит n нулей, не является периодической. Поэтому такая дробь не представляет никакого рационального числа. В этом случае говорят, что данная дробь является иррациональным числом.

Иррациональным числом *называется бесконечная десятичная непериодическая дробь.*

Иррациональные числа, так же как и рациональные, могут быть положительными и отрицательными.

Например, число 0,123456..., в котором после запятой записаны подряд все натуральные числа, является положительным иррациональным числом. Число −5,246810..., в котором после запятой записаны подряд все четные числа, является отрицательным иррациональным числом.

Числа $\sqrt{2}, \sqrt{7}, -\sqrt[3]{3}$, π также являются иррациональными, так как они могут быть записаны в виде бесконечных десятичных непериодических дробей.

Рациональные и иррациональные числа образуют множество *действительных чисел.*

Таким образом, ***действительными числами*** *называют бесконечные десятичные дроби*, т.е. дроби вида

$$+a_0,a_1a_2a_3 \ldots, \qquad -a_0,a_1a_2a_3 \ldots,$$

где a_0 — целое неотрицательное число, а буквы a_1, a_2, ... обозначают какие-либо из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Например, в записи действительного числа $\pi = 3{,}1415\ldots$ число $a_0 = 3$, а первые три десятичных знака таковы: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$.

В записи действительного числа $-\sqrt{234} = -15{,}297058\ldots$ число $a_0 = 15$, а десятичные знаки таковы: $a_1 = 2$, $a_2 = 9$, $a_3 = 7$, $a_4 = 0$ и т.д.

В записи действительного числа $37{,}19 = 37{,}19000\ldots$ число $a_0 = 37$, а десятичные знаки таковы: $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_n = 0$ при $n \geqslant 3$.

Действительное число может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Бесконечная десятичная дробь равна нулю, если все цифры в ее записи — нули.

Положительное действительное число — это десятичная дробь, не равная нулю, со знаком «+», а отрицательное — со знаком «−». Знак «+» перед дробью обычно опускается.

Вам известно, как выполняются действия над конечными десятичными дробями. Арифметические операции над действительными числами, т.е. бесконечными десятичными дробями, обычно заменяются операциями над их приближениями.

Например, вычислим приближенные значения суммы $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. С помощью микрокалькулятора находим

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135..., \qquad \sqrt{3} = 1{,}7320508... .$$

Поэтому с точностью до единицы:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} \approx 1{,}4 + 1{,}7 = 3{,}1 \approx 3;$$

с точностью до одной десятой:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} \approx 1{,}41 + 1{,}73 = 3{,}14 \approx 3{,}1;$$

с точностью до одной сотой:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} \approx 1{,}414 + 1{,}732 = 3{,}146 \approx 3{,}15$$

и т.д.

Итак, при сложении числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ заменялись их приближениями — рациональными числами, сложение которых выполнялось по известным правилам.

Аналогично, вычисляя произведение $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$, например, с точностью до 0,1, получаем

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} \approx 1{,}4 \cdot 1{,}7 = 2{,}38 \approx 2{,}4.$$

Вообще пусть $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ — последовательные приближения действительного числа x с точностью до 1, до 0,1, до 0,01 и т.д. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

так как погрешность приближения $|x - x_n| \to 0$ при n, стремящемся к бесконечности.

Например, зная, что $\sqrt{7} = 2{,}6457513...$, при вычислении значений числовых выражений, содержащих $\sqrt{7}$, можно воспользоваться любым его рациональным приближением: $x_1 = 3$; $x_2 = 2{,}6$; $x_3 = 2{,}65$; ... .

Отметим, что все основные свойства действий над рациональными числами сохраняются и для действительных чисел (переместительный, сочетательный и распределительный законы, правила сравнения, правила раскрытия скобок и т.п.).

Модуль действительного числа x обозначается $|x|$ и определяется так же, как и модуль рационального числа:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Например, если $x = -0{,}1010010001...$, то $|x| = -x = 0{,}101001...$.

Геометрически действительные числа изображаются точками числовой прямой (рис. 5, *а*).

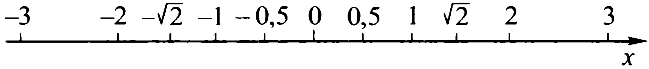


Рис. 5, *а*

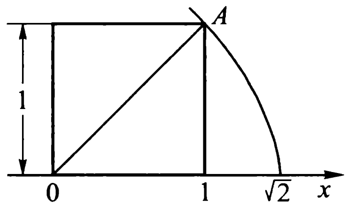


Рис. 5, *б*

Покажем, например, как можно геометрически указать на числовой оси точку с координатой $\sqrt{2}$. Построим квадрат со стороной 1 (рис. 5, *б*) и с помощью циркуля отложим диагональ *OA* на числовой оси.

Заметим, что если бы не было иррациональных чисел и соответствующих им точек числовой оси, то прямая оказалась бы с «дырками», в частности, не было бы на числовой оси точки с координатой $\sqrt{2}$.

Множество действительных чисел «заполняет» всю числовую прямую, каждому действительному числу соответствует единственная точка числовой прямой, и, наоборот, каждой точке числовой прямой соответствует единственное действительное число.

Точку, изображающую число a, также обозначают буквой a. Отметим, что если $a < b$, то точка a лежит левее точки b.

Множество всех действительных чисел обозначается $\boldsymbol{R}$. Запись $x \in \boldsymbol{R}$ (читается: «x принадлежит $\boldsymbol{R}$») означает, что x является действительным числом.

Упражнения

21. (*Устно.*) Выяснить, какие из данных десятичных дробей являются иррациональными числами:

1) 16,9;
2) 7,25(4);
3) 1,21221222... (после n-й единицы стоит n двоек);
4) 99,24681012... (после запятой записаны подряд все четные числа).

Книжные полки сообщества
EEK DIARY

22. Установить, какая из пар чисел 4,4 и 4,5 или 4,5 и 4,6 образует десятичные приближения числа $\sqrt{21}$ с недостатком и с избытком.

23. Какое из равенств $|x| = x$ или $|x| = -x$ является верным, если:

1) $x = 3 - \sqrt{8}$; 2) $x = 4 - 3\sqrt{2}$; 3) $x = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$;

4) $x = 2 - \sqrt[3]{9}$; 5) $x = 3 - \sqrt[3]{30}$?

24. Выяснить, каким числом (рациональным или иррациональным) является числовое значение выражения:

1) $(\sqrt{8}-3)(3+2\sqrt{2})$; 4) $(5\sqrt{3}+\sqrt{27}):\sqrt{3}$;

2) $(\sqrt{27}+2)(2-3\sqrt{3})$; 5) $(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2$;

3) $(\sqrt{50}+4\sqrt{2})\sqrt{2}$; 6) $(\sqrt{5}-1)^2-(2\sqrt{5}+1)^2$.

25. Вычислить:

1) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{28}$; 2) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$; 3) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$; 4) $\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt[3]{9}$;

5) $\sqrt{50}:\sqrt{8}$; 6) $\sqrt{12}:\sqrt{27}$; 7) $\sqrt[3]{16}:\sqrt[3]{54}$; 8) $\sqrt[3]{500}:\sqrt[3]{108}$.

---

26. Сравнить числовые значения выражений:

1) $\sqrt{3,9}+\sqrt{8}$ и $\sqrt{1,1}+\sqrt{17}$; 2) $\sqrt{11}-\sqrt{2,1}$ и $\sqrt{10}-\sqrt{3,1}$.

27. Упростить:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\sqrt{2}\right)\cdot 5\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{\left(\sqrt{16-6\sqrt{7}}+\sqrt{7}\right)\cdot 3}$;

3) $\sqrt{\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}+4}$;

4) $\sqrt{\left(\sqrt{8+2\sqrt{15}}-\sqrt{8-2\sqrt{15}}\right)\cdot 2+7}$;

5) $\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(5+\sqrt{6})+\sqrt{27}}{2\sqrt{3+2\sqrt{2}}-2}$; 6) $\dfrac{(\sqrt{3}+2)(7-\sqrt{12})-8}{3\sqrt{12+6\sqrt{3}}-9}$.

§ 4. Арифметический корень натуральной степени

Задача 1. Решить уравнение

$$x^4 = 81.$$

Δ Запишем уравнение в виде

$$x^4 - 81 = 0$$

или

$$(x^2-9)(x^2+9)=0.$$

Так как $x^2+9\neq 0$, то $x^2-9=0$, откуда $x_1=3$, $x_2=-3$. ▲

Итак, уравнение $x^4=81$ имеет два действительных корня $x_1=3$, $x_2=-3$. Их называют корнями четвертой степени из числа 81, а положительный корень (число 3) называют *арифметическим корнем* четвертой степени из числа 81 и обозначают $\sqrt[4]{81}$. Таким образом, $\sqrt[4]{81}=3$.

Можно доказать, что уравнение $x^n=a$, где n — натуральное число, a — неотрицательное число, имеет единственный неотрицательный корень. Этот корень называют арифметическим корнем n-й степени из числа a.

Определение. ***Арифметическим корнем натуральной степени $n\geqslant 2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.***

Арифметический корень n-й степени из числа a обозначается так: $\sqrt[n]{a}$. Число a называется подкоренным выражением. Если $n=2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$.

Арифметический корень второй степени называют также *квадратным корнем*, а корень третьей степени — *кубическим*.

В тех случаях, когда ясно, что речь идет об арифметическом корне n-й степени, кратко говорят: «корень n-й степени».

Чтобы, используя определение, доказать, что при а $\geqslant 0$ $\sqrt[n]{a}$ равен b, нужно показать, что:

$$1)\ b\geqslant 0; \qquad 2)\ b^n=a.$$

Например, $\sqrt[3]{64}=4$, так как $4>0$ и $4^3=64$.

Из определения арифметического корня следует, что если $a\geqslant 0$, то

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a, \quad \sqrt[n]{a^n}=a.}$$

Например, $\left(\sqrt[5]{7}\right)^5=7$, $\sqrt[6]{13^6}=13$.

Действие, посредством которого отыскивается корень n-й степени, называется *извлечением корня n-й степени*. Это действие является обратным к действию возведения в n-ю степень.

Задача 2. Решить уравнение

$$x^3=8.$$

△ Запишем уравнение в виде

$$x^3-8=0$$

или

$$(x-2)(x^2+2x+4)=0,$$

$$(x-2)[(x+1)^2+3]=0.$$

Так как $(x+1)^2+3 \neq 0$, то $x-2=0$, откуда $x=2$. ▲

Итак, уравнение $x^3=8$ имеет один действительный корень $x=2$. Так как $2>0$, то это число — арифметический корень из 8, т.е. $\sqrt[3]{8}=2$.

Задача 3. Решить уравнение

$$x^3=-8.$$

Δ Запишем уравнение в виде

$$x^3+8=0$$

или

$$(x+2)(x^2-2x+4)=0,$$

$$(x+2)[(x-1)^2+3]=0.$$

Так как $(x-1)^2+3 \neq 0$, то $x+2=0$, откуда $x=-2$. ▲

Итак, уравнение $x^3=-8$ имеет один действительный корень $x=-2$. Так как $-2<0$, то число -2 является корнем из числа -8, но оно не является арифметическим корнем. Число -2 называют корнем кубическим из числа -8 и обозначают так:

$$\sqrt[3]{-8}=-2 \text{ или } \sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2.$$

Вообще для любого нечетного натурального числа $2k+1$ уравнение $x^{2k+1}=a$ при $a<0$ имеет только один корень, причем отрицательный. Этот корень обозначается, как и арифметический корень, символом $\sqrt[2k+1]{a}$. Его называют *корнем нечетной степени из отрицательного числа*.

Например, $\sqrt[3]{-27}=-3$, $\sqrt[5]{-32}=-2$.

Корень нечетной степени из отрицательного числа a связан с арифметическим корнем из числа $-a=|a|$ следующим равенством:

$$\sqrt[2k+1]{a}=-\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{|a|}.$$

Например, $\sqrt[5]{-243}=-\sqrt[5]{243}=-3$.

Задача 4. Вычислить:

$$\sqrt[3]{-0{,}027}-\sqrt[4]{0{,}0016}-\sqrt[6]{729}-\sqrt[7]{-128}.$$

Δ $\sqrt[3]{-0{,}027}-\sqrt[4]{0{,}0016}-\sqrt[6]{729}-\sqrt[7]{-128}=\sqrt[3]{-(0{,}3)^3}-\sqrt[4]{(0{,}2)^4}-\sqrt[6]{3^6}-\sqrt[7]{-2^7}=$

$$=-0{,}3-0{,}2-3+2=-1{,}5. \text{ ▲}$$

Арифметический корень n-й степени обладает следующими *свойствами*.

Если $a \geqslant 0$, $b > 0$ и n, m — натуральные числа, причем $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$, то

1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.	**3.** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$.
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.	**4.** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nm]{a}$.

В свойстве 1 число b может также быть равным 0, в свойстве 3 число m может быть любым целым, если $a > 0$.

Докажем, например, что

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}.$$

○ Воспользуемся определением арифметического корня:

1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \geqslant 0$, так как $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$;

2) $\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n=ab$, так как $\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=ab$. ●

Аналогично доказываются и остальные свойства.

Приведем примеры применения свойств арифметического корня:

1) $\sqrt[4]{27}\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{27\cdot 3}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$;

2) $\sqrt[3]{\dfrac{256}{625}}:\sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}=\sqrt[3]{\dfrac{256}{625}:\dfrac{4}{5}}=\dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}}=\dfrac{4}{5}$;

3) $\sqrt[7]{5^{21}}=\sqrt[7]{(5^7)^3}=\left(\sqrt[7]{5^7}\right)^3=5^3=125$;

4) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}}=\sqrt[12]{4096}=\sqrt[12]{2^{12}}=2$;

5) $\left(\sqrt[4]{9}\right)^{-2}=\sqrt[4]{9^{-2}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}}=\dfrac{1}{3}$.

З а д а ч а 5. Упростить выражение

$$\frac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}},\ \text{где } a>0,\ b>0.$$

Δ Используя свойства арифметического корня, получаем

$$\frac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}=\frac{a^3b^2}{\sqrt[6]{a^{12}b^6}}=\frac{a^3b^2}{a^2b}=ab.\ \blacktriangle$$

Отметим еще одно свойство арифметического корня четной степени.

При любом значении a справедливо равенство

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|.$$

○ Воспользуемся определением арифметического корня:

1) $|a| \geqslant 0$ по определению модуля;

2) $|a|^{2k} = a^{2k}$, так как $|a|^2 = a^2$. ●

Задача 6. Упростить выражение

$$\sqrt[4]{(x-5)^4} + \sqrt[6]{(x-3)^6},$$

если $3 < x < 5$.

$$\Delta \ \sqrt[4]{(x-5)^4} + \sqrt[6]{(x-3)^6} = |x-5| + |x-3|.$$

Так как $3 < x < 5$, то

$$|x-5| = -(x-5) = 5-x, \qquad |x-3| = x-3.$$

Поэтому

$$\sqrt[4]{(x-5)^4} + \sqrt[6]{(x-3)^6} = 5-x+x-3 = 2. \ ▲$$

Упражнения

28. (*Устно.*) 1) Найти арифметический квадратный корень из числа: 1; 0; 16; $0{,}81$; 169; $\frac{1}{289}$.

2) Найти арифметический кубический корень из числа: 1; 0; 125; $\frac{1}{27}$; $0{,}027$; $0{,}064$.

3) Найти арифметический корень четвертой степени из числа: 0; 1; 16; $\frac{16}{81}$; $\frac{256}{625}$; $0{,}0016$.

Вычислить (29—31).

29. 1) $\sqrt[6]{36^3}$; 2) $\sqrt[12]{64^2}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}$; 4) $\sqrt[8]{225^4}$.

30. 1) $\sqrt[3]{10^6}$; 2) $\sqrt[3]{3^{12}}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$; 4) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{16}}$.

31. 1) $\sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[15]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$; 4) $\sqrt[5]{-1024}$;

5) $\sqrt[3]{-34^3}$; 6) $\sqrt[7]{-8^7}$.

32. Решить уравнение:

1) $x^4 = 81$; 2) $x^5 = -\frac{1}{32}$; 3) $5x^5 = -160$; 4) $2x^6 = 128$.

Вычислить (33—37).

33. 1) $\sqrt[3]{-125} + \frac{1}{8}\sqrt[6]{64}$; 4) $\sqrt[3]{-1000} - \frac{1}{4}\sqrt[4]{256}$;

2) $\sqrt[5]{32} - 0{,}5\sqrt[3]{-216}$; 5) $\sqrt[4]{0{,}0001} - 2\sqrt{0{,}25} + \sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$;

3) $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{625}$; 6) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} + \sqrt[3]{-0{,}001} - \sqrt[4]{0{,}0016}$.

34. 1) $\sqrt[3]{343 \cdot 0{,}125}$; 3) $\sqrt[4]{256 \cdot 0{,}0081}$;

2) $\sqrt[3]{512 \cdot 216}$; 4) $\sqrt[5]{32 \cdot 100000}$.

35. 1) $\sqrt[3]{5^3 \cdot 7^3}$; 2) $\sqrt[4]{11^4 \cdot 3^4}$; 3) $\sqrt[5]{(0{,}2)^5 \cdot 8^5}$; 4) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot 21^7}$.

36. 1) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500}$; 2) $\sqrt[3]{0{,}2} \cdot \sqrt[3]{0{,}04}$; 3) $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4}$; 4) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16}$.

37. 1) $\sqrt[5]{3^{10} \cdot 2^{15}}$; 2) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 5^6}$; 3) $\sqrt[4]{3^{12}\left(\frac{1}{3}\right)^8}$; 4) $\sqrt[10]{4^{30} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}$.

38[1]. Извлечь корень:

1) $\sqrt[3]{64x^3z^6}$; 2) $\sqrt[4]{a^8b^{12}}$; 3) $\sqrt[5]{32x^{10}y^{20}}$; 4) $\sqrt[6]{a^{12}b^{18}}$.

39. Упростить выражение:

1) $\sqrt[3]{2ab^2} \cdot \sqrt[3]{4a^2b}$; 3) $\sqrt[4]{\frac{ab}{c}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^3c}{b}}$;

2) $\sqrt[4]{3a^2b^3} \cdot \sqrt[4]{27a^2b}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{16a}{b^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2ab}}$.

Вычислить (40–41).

40. 1) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; 3) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; 4) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$.

41. 1) $\sqrt[4]{324} : \sqrt[4]{4}$; 2) $\sqrt[3]{128} : \sqrt[3]{2000}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$; 4) $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}$;

5) $(\sqrt{25} - \sqrt{45}) : \sqrt{5}$; 6) $(\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{5}) : \sqrt[3]{5}$.

---

[1] Здесь и далее буквами обозначены положительные числа, если нет дополнительных условий.

42. Упростить выражение:

1) $\sqrt[5]{a^6b^7} : \sqrt[5]{ab^2}$;
3) $\sqrt[3]{\frac{3x}{y^2}} : \sqrt[3]{\frac{y}{9x^2}}$;

2) $\sqrt[3]{81x^4y} : \sqrt[3]{3xy}$;
4) $\sqrt[4]{\frac{2b}{a^3}} : \sqrt[4]{\frac{a}{8b^3}}$.

Вычислить (**43–44**).

43. 1) $\left(\sqrt[6]{7^3}\right)^2$; 2) $\left(\sqrt[6]{9}\right)^{-3}$; 3) $\left(\sqrt[10]{32}\right)^2$; 4) $\left(\sqrt[8]{16}\right)^{-4}$.

44. 1) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$; 2) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[9]{3^7}$; 4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}} \cdot \sqrt[6]{5^5}$.

45. Упростить выражение:

1) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^6$; 2) $\left(\sqrt[3]{y^2}\right)^3$; 3) $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b}\right)^6$;

4) $\left(\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b^3}\right)^{12}$; 5) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}}\right)^6$; 6) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{27a^3}}\right)^4$.

46. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt[6]{2x-3}$; 2) $\sqrt[6]{x+3}$; 3) $\sqrt[6]{2x^2-x-1}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2-3x}{2x-4}}$?

Вычислить (**47–48**).

47. 1) $\sqrt{9+\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9-\sqrt{17}}$;
3) $\left(\sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$;
4) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

48. 1) $\frac{\sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}}$;
4) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} + \sqrt[4]{18}\sqrt[4]{4\frac{1}{2}} - \sqrt{\sqrt{256}}$;

2) $\frac{\sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}}$;
5) $\sqrt[3]{11-\sqrt{57}} \cdot \sqrt[3]{11+\sqrt{57}}$;

3) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[6]{27^2} - \sqrt{\sqrt[3]{64}}$;
6) $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{17+\sqrt{33}}$.

Упростить выражение (**49–50**).

49. 1) $\sqrt[3]{2ab} \cdot \sqrt[3]{4a^2b} \cdot \sqrt[3]{27b}$;
3) $\frac{\sqrt[5]{a^3b^2} \cdot \sqrt[5]{3a^2b^3}}{\sqrt[5]{3ab}}$;

2) $\sqrt[4]{abc} \cdot \sqrt[4]{a^3b^2c} \cdot \sqrt[4]{b^5c^2}$;
4) $\frac{\sqrt[4]{8x^2y^5} \cdot \sqrt[4]{4x^3y}}{\sqrt[4]{2xy^2}}$.

50. 1) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{18}}}+\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}\right)^3$;

2) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}\right)^3+2\left(\sqrt[4]{\sqrt{x}}\right)^8$;

3) $2\sqrt{\sqrt{a^4b^8}}-\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^3b^6}}\right)^2$;

4) $\sqrt[3]{\sqrt{x^6y^{12}}}-\left(\sqrt[5]{xy^2}\right)^5$;

5) $\left(\sqrt{\sqrt[4]{x^8y^2}}\right)^4-\left(\sqrt[4]{x^2y^8}\right)^2$;

6) $\left(\left(\sqrt[5]{a\sqrt[5]{a}}\right)^5-\sqrt[5]{a}\right):\sqrt[10]{a^2}$.

51. Вычислить:

1) $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$;

2) $\dfrac{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[4]{343}}{\sqrt[12]{7}}$;

3) $\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}\right)\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}\right)$;

4) $\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)$.

52. Упростить:

1) $\sqrt[3]{(x-2)^3}$ при: а) $x\geqslant 2$; б) $x<2$;

2) $\sqrt{(3-x)^6}$ при: а) $x\leqslant 3$; б) $x>3$;

3) $\sqrt[4]{(x+6)^4}+\sqrt{(x-3)^2}$, если $-1<x<2$;

4) $\sqrt[6]{(2x+1)^6}-\sqrt[4]{(4+x)^4}$, если $-3<x<-1$.

53*. Сравнить значения выражений:

1) $\sqrt{3}+\sqrt[3]{30}$ и $\sqrt[3]{63}$;

2) $\sqrt[3]{7}+\sqrt{15}$ и $\sqrt{8}+\sqrt[3]{28}$.

54*. Доказать, что:

1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$;

2) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$.

55*. Упростить выражение:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$;

2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$;

3) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$;

4) $\left(\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2$.

§ 5. Степень с рациональным показателем

Задача 1. Вычислить $\sqrt[4]{5^{12}}$.

Δ Так как $5^{12}=(5^3)^4$, то $\sqrt[4]{5^{12}}=\sqrt[4]{(5^3)^4}=5^3=125$. ▲

Таким образом, можно записать $\sqrt[4]{5^{12}}=125=5^3$ или $\sqrt[4]{5^{12}}=5^{\frac{12}{4}}$, так как $3=\dfrac{12}{4}$.

Точно так же можно записать, что $\sqrt[5]{7^{-15}} = 7^{-\frac{15}{5}}$.

Вообще если n — натуральное число, $n \geqslant 2$; m — целое число и частное $\frac{m}{n}$ является целым числом, то при $a > 0$ справедливо равенство

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.} \tag{1}$$

По условию $\frac{m}{n}$ — целое число, т.е. при делении m на n в результате имеем целое число k. Тогда из равенства $\frac{m}{n} = k$ следует, что $m = kn$. Применяя свойства степени и арифметического корня, получаем

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = a^k = a^{\frac{m}{n}}.$$

Если же частное $\frac{m}{n}$ не является целым числом, то степень $a^{\frac{m}{n}}$, где $a > 0$, определяют так, чтобы осталась верной формула (1), т.е. и в этом случае считают, что

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \tag{2}$$

Таким образом, формула (2) справедлива для любого целого числа m и любого натурального числа $n \geqslant 2$ и $a > 0$.

Например,

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8;$$

$$7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5} = \sqrt[4]{7^4 \cdot 7} = 7\sqrt[4]{7};$$

$$27^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^2}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{3^6}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Напомним, что *рациональное число* r — это число вида $\frac{m}{n}$, т.е. $r = \frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное числа. Тогда по формуле (2) получаем $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Таким образом, степень определена для любого рационального показателя и любого положительного основания. Если $r = \frac{m}{n} > 0$, то выражение $\sqrt[n]{a^m}$ имеет смысл не только при $a > 0$, но и при $a = 0$, причем $\sqrt[n]{0^m} = 0$. Поэтому считают, что при $r > 0$ выполняется равенство $0^r = 0$.

Пользуясь формулой (2), степень с рациональным показателем можно представить в виде корня и наоборот.

Так как $\frac{m}{n}=\frac{mk}{nk}$, где n — натуральное число, m и k — целые числа, $k \neq 0$, то при любом $a > 0$

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}.$$

Например, $7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{6}{8}} = 7^{\frac{9}{12}}$.

Можно показать, что *все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием*. А именно для любых рациональных чисел p и q и любых $a > 0$ и $b > 0$ верны равенства:

1. $a^p a^q = a^{p+q}$.	4. $(ab)^p = a^p b^p$.
2. $a^p : a^q = a^{p-q}$.	5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.
3. $(a^p)^q = a^{pq}$.	

Эти свойства получаются из свойств корней.

Докажем, например, свойство $a^p a^q = a^{p+q}$.

○ Пусть $p=\frac{m}{n}$, $q=\frac{k}{l}$, где n и l — натуральные, m и k — целые числа. Требуется доказать, что

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}.} \qquad (3)$$

Приведя дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{l}$ к общему знаменателю, записываем левую часть равенства (3) в виде:

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} a^{\frac{kn}{nl}}.$$

Используя определение степени с рациональным показателем, свойства корня и степени с целым показателем, получаем

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} a^{\frac{kn}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{ml}} \cdot \sqrt[nl]{a^{kn}} = \sqrt[nl]{a^{ml} \cdot a^{kn}} = \sqrt[nl]{a^{ml+kn}} =$$

$$= a^{\frac{ml+kn}{nl}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}. \quad ●$$

Аналогично доказываются остальные свойства степени с рациональным показателем.

Приведем примеры применения свойств степени:

1) $7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 7;$

2) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3;$

3) $\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 16^{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4\cdot\frac{3}{4}} = 2^3 = 8;$

4) $24^{\frac{2}{3}} = (2^3 \cdot 3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 4\sqrt[3]{3^2} = 4\sqrt[3]{9};$

5) $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{2}{3}.$

Задача 2. Вычислить $25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}}.$

$$\Delta\ 25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}} = (25 \cdot 125)^{\frac{1}{5}} = (5^5)^{\frac{1}{5}} = 5. \ \blacktriangle$$

Задача 3. Упростить выражение $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}.$

$$\Delta\ \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab. \ \blacktriangle$$

Задача 4. Упростить выражение $\dfrac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \dfrac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}}.$

$$\Delta\ \frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1-a)} - \frac{a^{-\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(1+a)} = 1 + a - (1-a) = 2a. \ \blacktriangle$$

Задача 5. Вкладчик помещает в банк 1000 р. Банк ежегодно выплачивает ему 3% от суммы вклада. Какую сумму денег получит вкладчик через 3 года и 5 месяцев?

Δ Искомая сумма вычисляется по формуле сложных процентов

$$S = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t, \qquad (4)$$

где a — первоначальная сумма денег; p — число процентов, начисляемых банком в год; t — число лет, в течение которых деньги находились в банке.

В данной задаче $a = 1000$, $p = 3$, $t = 3\frac{5}{12}$. По формуле (4) находим

$$S = 1000 \cdot 1{,}03^{3\frac{5}{12}}.$$

Вычисления можно провести на микрокалькуляторе. Например, на **МК–54** это можно сделать по следующей программе:

5 $\boxed{\text{В}\uparrow}$ 12 $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{+}$ 1,03 $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{x^y}$ 1000 $\boxed{\times}$ 1106,2684.

Ответ. 1106 р. 27 к. $\blacktriangle$

Упражнения

56. (*Устно.*) Представить в виде степени с рациональным показателем:

1) $\sqrt{x^3}$; 2) $\sqrt[3]{a^4}$; 3) $\sqrt[4]{b^3}$; 4) $\sqrt[5]{x^{-1}}$; 5) $\sqrt[6]{a}$; 6) $\sqrt[7]{b^{-3}}$.

57. (*Устно.*) Представить в виде корня из степени с целым показателем:

1) $x^{\frac{1}{4}}$; 2) $y^{\frac{2}{5}}$; 3) $a^{-\frac{5}{6}}$; 4) $b^{-\frac{1}{3}}$; 5) $(2x)^{\frac{1}{2}}$; 6) $(3b)^{-\frac{2}{3}}$.

Вычислить (58–62).

58. 1) $64^{\frac{1}{2}}$; 2) $27^{\frac{1}{3}}$; 3) $8^{\frac{2}{3}}$; 4) $81^{\frac{3}{4}}$; 5) $16^{-0,75}$; 6) $9^{-1,5}$.

59. 1) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$; 2) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}$; 3) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}$;

4) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}$; 5) $(7^{-3})^{-\frac{2}{3}}$; 6) $(8^{\frac{1}{12}})^{-4}$.

60. 1) $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}}$; 2) $7^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{\frac{2}{3}}$; 3) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}$; 4) $150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}}$.

61. 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; 3) $8^{\frac{9}{7}} : 8^{\frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}}$;

2) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$; 4) $(5^{-\frac{2}{5}})^{-5} + ((0,2)^{\frac{3}{4}})^{-4}$.

62. 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 810000^{0,25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$;

2) $(0,001)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2}(64)^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}}$;

3) $27^{\frac{2}{3}} - (-2)^{-2} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$;

4) $(-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}$;

5) $(0,0625)^{0,25} + (-2)^{-2} + \sqrt[5]{25 \cdot 5^3}$.

63. Найти значение выражения:

1) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$ при $a = 0,09$; 3) $\dfrac{\sqrt{b}\,\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}}$ при $b = 1,3$;

2) $\sqrt{b} : \sqrt[6]{b}$ при $b = 27$; 4) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5}$ при $a = 2,7$.

64. Представить в виде степени с рациональным показателем:

1) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$; 2) $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}$; 3) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}}$;

4) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$; 5) $x^{1,7} \cdot x^{2,8} : \sqrt{x^5}$; 6) $(y^{-3,8} : y^{-2,3}) \cdot \sqrt{y^3}$.

65. Вынести общий множитель за скобки:

1) $x^{\frac{1}{2}}+x$; 3) $y^{\frac{3}{4}}-y^{-\frac{1}{4}}$;

2) $(ab)^{\frac{1}{3}}+(ac)^{\frac{1}{3}}$; 4) $12xy^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}y$.

66. Пользуясь тождеством $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, разложить на множители:

1) $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$; 2) $y^{\frac{2}{3}}-1$; 3) $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$;

4) $x-y$; 5) $4a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$; 6) $0{,}01m^{\frac{1}{6}}-n^{\frac{1}{6}}$.

67. Разложить на множители, используя тождества $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ или $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$:

1) $a-x$; 2) $x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}$; 3) $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$; 4) $27a+c^{\frac{1}{2}}$.

Упростить выражение (**68–69**).

68. 1) $\left(a^4\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-6}$; 2) $\left(\left(\dfrac{a^6}{b^{-3}}\right)^4\right)^{\frac{1}{12}}$.

69. 1) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)}$; 3) $\dfrac{a^{\frac{5}{3}}b^{-1}-a^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}$;

2) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}\left(\sqrt[5]{b^4}-\sqrt[5]{b^{-1}}\right)}{b^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^{-2}}\right)}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$.

70. Вычислить:

1) $\left(2^{\frac{5}{3}}\cdot3^{-\frac{1}{3}}-3^{\frac{5}{3}}\cdot2^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\sqrt[3]{6}$; 2) $\left(5^{\frac{1}{4}}:2^{\frac{3}{4}}-2^{\frac{1}{4}}:5^{\frac{3}{4}}\right)\cdot\sqrt[4]{1000}$.

71. Упростить выражение:

1) $a^{\frac{1}{9}}\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a}}$; 3) $\left(\sqrt[3]{ab^{-2}}+(ab)^{-\frac{1}{6}}\right)\sqrt[6]{ab^4}$;

2) $b^{\frac{1}{12}}\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 4) $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}\right)$.

72. Сократить дробь:

1) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; 3) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}{m+2\sqrt{mn}+n}$;

2) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}$; 4) $\dfrac{c-2c^{\frac{1}{2}}+1}{\sqrt{c}-1}$.

Упростить выражение (73–76).

73. 1) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{c^{\frac{3}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{cb^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{2c^2-4cb}{c-b}$.

---

74. 1) $\left(1-2\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\dfrac{b}{a}\right):\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2$; 3) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{5}{4}}}-\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}$;

2) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right):\left(2+\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}+\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)$; 4) $\dfrac{\sqrt{a}-a^{-\frac{1}{2}}b}{1-\sqrt{a^{-1}b}}-\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-a^{-\frac{1}{3}}b}{\sqrt[6]{a}+a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{b}}$.

75. 1) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{ab^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\dfrac{2a^2-4ab}{a-b}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$;

2) $\dfrac{3xy-y^2}{x-y}-\dfrac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$.

76*. 1) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 3) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}-\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$;

2) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a+b}+\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

77*. Упростить:

1) $\dfrac{x+y}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{x-y}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}$;

2) $\dfrac{(a-b)^2}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{a^2-b^2}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}$;

3) $\left(\dfrac{4n^{\frac{1}{2}}}{n-1}+\dfrac{2n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}+1}-\dfrac{2}{1-n^{\frac{1}{2}}}\right):\left(1+\dfrac{2}{n^{\frac{1}{2}}-1}\right)$;

4) $\left(\dfrac{3x^{\frac{2}{3}}+5x^{\frac{1}{3}}}{x+1}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}\right):\left(4x^{\frac{1}{3}}+4+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)$.

78*. Вкладчик вложил в банк 5000 р. под 2% годовых. Сколько денег он получит через 3 года?

79*. Банк выплачивает ежегодно 3% от суммы вклада. Сколько денег получит вкладчик через 2 года 7 месяцев, если первоначальная сумма вклада составляла 2000 р.?

§ 6. Степень с действительным показателем

Покажем, как можно определить *степень с иррациональным показателем* на примере $3^{\sqrt{2}}$.

Пусть r_1, r_2, r_3, ..., r_n, ... — последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ (например, с недостатком):

$$r_1 = 1{,}4;\ r_2 = 1{,}41;\ r_3 = 1{,}414,\ \dots .$$

Эта последовательность стремится к числу $\sqrt{2}$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \sqrt{2}.$$

Числа r_1, r_2, r_3, ... являются рациональными, и для них определены степени $3^{r_1}, 3^{r_2}, 3^{r_3}$, ..., т.е. определена последовательность

$$3^{1,4},\ 3^{1,41},\ 3^{1,414},\ \dots .$$

Можно показать, что эта последовательность стремится к некоторому действительному числу, которое обозначают $3^{\sqrt{2}}$, т.е.

$$3^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} 3^{r_n}.$$

Пусть $a > 0$ и x — произвольное иррациональное число. Рассмотрим последовательность x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... десятичных приближений числа x. Эта последовательность имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Можно показать, что последовательность $a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \dots, a^{x_n}, \dots$ также имеет предел. Этот предел обозначают a^x и называют степенью числа a с показателем x:

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}.$$

Таким образом, степень a^x определена для любого $a > 0$ и любого действительного показателя x.

При любом $x \in \boldsymbol{R}$ и любом $a > 0$ степень a^x является положительным действительным числом:

$$\boxed{a^x > 0 \text{ при } x \in \boldsymbol{R},\ a > 0.}$$

Если основание степени $a = 0$, то степень 0^x определяют только при $x > 0$ и считают, что $0^x = 0$ при $x > 0$. Например, $0^{\sqrt{2}} = 0$; $0^{0,1} = 0$. При $x \leqslant 0$ выражение 0^x не имеет смысла. Например, выражения 0^{-1}, $0^{-\sqrt{2}}$, 0^0 не имеют смысла.

При таком определении степени с действительным показателем сохраняются все известные свойства степени с рациональным показателем. Сформулируем эти свойства.

Пусть $a > 0$, $b > 0$, x, x_1 и x_2 — любые действительные числа. Тогда справедливы равенства:

$$a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2}, \qquad (1)$$

$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}, \qquad (2)$$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1x_2}, \qquad (3)$$

$$(ab)^x = a^x b^x, \qquad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}. \qquad (5)$$

Доказательство этих равенств основывается на свойствах степени с рациональным показателем и на теории пределов последовательностей, которая изучается в курсе высшей математики.

Задача 1. Упростить выражение $\frac{(a^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3}\cdot a^{4-\sqrt{5}}}$.

Δ Применяя свойства степени с действительным показателем, получаем

$$\frac{(a^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3}\cdot a^{4-\sqrt{5}}} = \frac{a^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{a^{\sqrt{5}-3+4-\sqrt{5}}} = \frac{a^2}{a} = a. \ ▲$$

Приведем еще одно свойство степени, доказываемое в курсе высшей математики с помощью теории пределов: для любого $a > 1$ и любого $x > 0$ число a^x больше 1, т.е.

$$\boxed{a^x > 1 \text{ при } a > 1, \ x > 0.} \qquad (6)$$

С помощью свойств (1) — (6) доказываются следующие свойства степени.

Теорема. Пусть $a > 1$ и $x_1 < x_2$. Тогда $a^{x_1} < a^{x_2}$.

○ По условию $x_2 - x_1 > 0$. Поэтому по свойству (6)

$$a^{x_2-x_1} > 1.$$

Умножим обе части этого неравенства на положительное число a^{x_1}:

$$a^{x_1}\cdot a^{x_2-x_1} > a^{x_1}.$$

Отсюда по свойству (1) получим $a^{x_2} > a^{x_1}$. ●

Следствие 1. Пусть $0 < a < 1$ и $x_1 < x_2$. Тогда $a^{x_1} > a^{x_2}$.

○ Так как $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$. Поэтому из теоремы следует, что при $x_1 < x_2$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{x_1} < \left(\frac{1}{a}\right)^{x_2}.$$

По свойству (5) степени $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$. Следовательно, $\frac{1}{a^{x_1}} < \frac{1}{a^{x_2}}$, откуда $a^{x_1} > a^{x_2}$. ●

Следствие 2. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $a^{x_1} = a^{x_2}$. Тогда $x_1 = x_2$.

○ Предположим, что равенство $x_1 = x_2$ не выполняется, т.е. $x_1 < x_2$ или $x_1 > x_2$. Пусть, например, $x_1 < x_2$. Тогда при $a > 1$ по теореме должно быть $a^{x_1} < a^{x_2}$, а при $0 < a < 1$ по следствию 1 должно быть $a^{x_1} > a^{x_2}$, что противоречит условию $a^{x_1} = a^{x_2}$. ●

Задача 2. Сравнить числа $5^{2\sqrt{3}}$ и $5^{3\sqrt{2}}$.

Δ Сравним показатели $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$. Так как $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$, $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ и $12 < 18$, то $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$. Поэтому по теореме $5^{2\sqrt{3}} < 5^{3\sqrt{2}}$. ▲

Задача 3. Сравнить числа $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{8}}$ и $\left(\frac{\pi}{4}\right)^3$.

Δ Так как $0 < \pi < 4$, то $0 < \frac{\pi}{4} < 1$.

Сравним показатели: $\sqrt{8} < \sqrt{9}$, т.е. $\sqrt{8} < 3$.

Применяя следствие 1, получаем $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{8}} > \left(\frac{\pi}{4}\right)^3$. ▲

Задача 4. Решить уравнение $4^x = 2^{4\sqrt{3}}$.

Δ По свойствам степени $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$. Поэтому уравнение можно записать так: $2^{2x} = 2^{4\sqrt{3}}$. Применяя следствие 2, получаем $2x = 4\sqrt{3}$, откуда $x = 2\sqrt{3}$. ▲

Следствие 3. Пусть $0 < x_1 < x_2$. Тогда если $p > 0$, то $x_1^p < x_2^p$, а если $p < 0$, то $x_1^p > x_2^p$.

○ По условию $\frac{x_2}{x_1} > 1$. 1) Если $p > 0$, то по формуле (6) имеем $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^p > 1$. По свойству степени $\frac{x_2^p}{x_1^p} > 1$, откуда $x_2^p > x_1^p$, т.е. $x_1^p < x_2^p$.

2) Если $p < 0$, то $-p > 0$ и по формуле (6) имеем $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-p} > 1$, откуда $\frac{x_2^{-p}}{x_1^{-p}} > 1$, $\frac{x_1^p}{x_2^p} > 1$, $x_1^p > x_2^p$. ●

Таким образом, при возведении неравенства с положительными левой и правой частями в положительную степень знак неравенства не меняется, а при возведении в отрицательную степень знак неравенства меняется на противоположный.

З а д а ч а 5. Сравнить числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$.

Δ По свойствам степени получаем

$(\sqrt{2})^6=(2^{\frac{1}{2}})^6=2^3=8;\ (\sqrt[3]{3})^6=(3^{\frac{1}{3}})^6=3^2=9.$ Так как $0<8<9$, то $8^{\frac{1}{6}}<9^{\frac{1}{6}}$, т. е. $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$. ▲

Упражнения

Вычислить (80–83).

80. 1) $2^{\sqrt{5}}\cdot 2^{-\sqrt{5}}$; 2) $3^{2\sqrt{2}}:9^{\sqrt{2}}$; 3) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$; 4) $((0,5)^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$.

81. 1) $2^{2-3\sqrt{5}}\cdot 8^{\sqrt{5}}$; 4) $(5^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$;

2) $3^{1+2\sqrt[3]{2}}:9^{\sqrt[3]{2}}$; 5) $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}+(3^{\sqrt{3}+1})^{\sqrt{3}-1}$;

3) $6^{1+2\sqrt{3}}:(4^{\sqrt{3}}\cdot 9^{\sqrt{3}})$; 6) $(5^{1-\sqrt{5}})^{1+\sqrt{5}}-(\sqrt{5})^0$.

82. 1) $2^{1-2\sqrt{2}}\cdot 4^{\sqrt{2}}$; 3) $9^{1+\sqrt{3}}\cdot 3^{1-\sqrt{3}}\cdot 3^{-2-\sqrt{3}}$;

2) $3^{2-3\sqrt{3}}\cdot 27^{\sqrt{3}}$; 4) $4^{3+\sqrt{2}}\cdot 2^{1-\sqrt{2}}\cdot 2^{-4-\sqrt{2}}$.

83. 1) $\dfrac{10^{2+\sqrt{7}}}{2^{2+\sqrt{7}}\cdot 5^{1+\sqrt{7}}}$; 3) $(25^{1+\sqrt{2}}-5^{2\sqrt{2}})\cdot 5^{-1-2\sqrt{2}}$;

2) $\dfrac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}\cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$; 4) $(2^{2\sqrt{3}}-4^{\sqrt{3}-1})\cdot 2^{-2\sqrt{3}}$.

84. Выяснить, какое из чисел больше:

1) $0{,}1^{\frac{7}{8}}$ или $0{,}1^{\frac{8}{9}}$; 5) $4^{-\sqrt{3}}$ или $4^{-\sqrt{2}}$;

2) $5^{-\frac{2}{3}}$ или $5^{-\frac{3}{4}}$; 6) $2^{\sqrt{3}}$ или $2^{1,7}$;

3) $3^{\sqrt{71}}$ или $3^{\sqrt{69}}$; 7) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4}$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$;

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$ или $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$; 8) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}$ или $\left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$.

85. Сравнить число с единицей:

1) 2^{-2}; 2) $(0{,}013)^{-1}$; 3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{5}$; 4) $27^{1,5}$;

5) $2^{-\sqrt{5}}$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; 7) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$; 8) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}$.

86. Упростить выражение:

1) $a^{\sqrt{2}}\cdot a^{1-\sqrt{2}}$; 3) $b^{\sqrt{5}+\sqrt{2}}:b^{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$;

2) $a^{\sqrt{3}-1}\cdot a^{\sqrt{3}+1}$; 4) $(b^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}:b^2$.

87. Сравнить числа:

1) $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{3}$;   2) $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[4]{7}$.

Упростить выражение (**88–89**).

88. 1) $\frac{m^{\sqrt{3}}\cdot n^{\sqrt{3}}}{(mn)^{2+\sqrt{3}}}$;   3) $(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}})(a^{\sqrt{2}}+b^{\sqrt{3}})$;

2) $\frac{x^{\sqrt{7}}\cdot y^{\sqrt{7}+1}}{(xy)^{\sqrt{7}}}$;   4) $\left(2a^{-0,5}-\frac{1}{3}b^{-\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{3}b^{-\sqrt{3}}+2a^{-0,5}\right)$.

89. 1) $(a^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$;   3) $(a^{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}})^{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$;

2) $\left(m^{\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}\right)^{5}\cdot m^{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$;   4) $(a^{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1})^{1-\sqrt[3]{3}}$.

90. Решить уравнение:

1) $5^{2x}=5^{4}$;   2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$;   3) $9^{x}=3^{2\sqrt{2}}$;   4) $16^{x}=2^{8\pi}$.

91. Решить уравнение:

1) $7^{x\sqrt{3}}=\sqrt{7}$;   3) $(\sqrt{2})^{x}=2\sqrt{2}$;

2) $25^{x\sqrt{2}}=5\sqrt{5}$;   4) $(\sqrt{3})^{3x}=3\sqrt{3}$.

92. Сравнить числа:

1) $\sqrt[3]{10}$ и $\sqrt[5]{20}$;   3) $\sqrt{17}$ и $\sqrt[3]{28}$;

2) $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[3]{7}$;   4) $\sqrt[4]{13}$ и $\sqrt[5]{23}$.

93. Решить уравнение:

1) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+1}=(3\sqrt{3})^{x}$;   3) $9^{3x+4}\sqrt{3}=\frac{27^{x-1}}{\sqrt{3}}$;

2) $(\sqrt[3]{2})^{x-1}=\left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)^{2x}$;   4) $\frac{8}{(\sqrt{2})^{x}}=4^{3x-2}\sqrt{2}$.

Упражнения к главе I

94. Вычислить:

1) $\frac{5,48+8,02}{(7,97+8,77):3,72}$;   2) $\frac{20,88:18+45:0,36}{19,59+11,95}$;

3) $\left(0,645:0,3-1\frac{107}{180}\right)\cdot\left(4:6,25-1:5+\frac{1}{7}\cdot 1,96\right)$;

4) $\left(\frac{1}{2}-0,375\right):0,125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0,358-0,108)$.

95. Представить в виде обыкновенной дроби:

1) 1,3(1); 2) 2,3(2); 3) 0,(248); 4) 0,(34).

Вычислить (**96–99**).

96. 1) 15^2; $(0,5)^2$; $\left(\frac{1}{3}\right)^3$; $(-1,1)^2$; $\left(-1\frac{2}{3}\right)^3$; $(0,2)^4$;

2) 48^0; 10^{-2}; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; $(0,3)^{-3}$; $(-1,2)^{-2}$; $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2}$;

3) $\sqrt[3]{27}$; $\sqrt[4]{81}$; $\sqrt[5]{32}$; $\sqrt[6]{8^2}$; $\sqrt[8]{16^2}$; $\sqrt[3]{27^2}$;

4) $8^{\frac{1}{3}}$; $27^{\frac{2}{3}}$; $10000^{\frac{1}{4}}$; $32^{\frac{2}{5}}$; $32^{-\frac{3}{5}}$; $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$.

97. 1) $\sqrt[3]{5^3\cdot 7^3}$; $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}$; $\sqrt[4]{15\frac{5}{8}}:\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$;

2) $56^0:8^{-2}$; $16^{\frac{1}{4}}\cdot 25^{\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{15}\right)^{-1}:9^{\frac{1}{2}}$; $8^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\right)^4:16^{-1}$;

$27^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}:81^{\frac{3}{4}}$; $\sqrt{100}\cdot 49^{\frac{1}{2}}\cdot 35^{-1}$;

3) $(16\cdot 81\cdot 625)^{-\frac{1}{4}}$; $(27\cdot 0{,}008\cdot 125)^{\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{0{,}25\cdot 64}{0{,}01}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

4) $\frac{5^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{-\frac{1}{4}}}{5^2}$; $\frac{7^{\frac{7}{3}}\cdot 7^{-\frac{4}{3}}}{7^2}$; $\frac{(0{,}3)^{0{,}3}\cdot(0{,}3)^{-1}}{(0{,}3)^{1{,}3}}$.

98. 1) $\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; 2) $\left(\frac{1}{27}\cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 3) $27^{\frac{2}{3}}+9^{-1}$;

4) $(0{,}01)^{-2}:100^{-\frac{1}{2}}$; 5) $\left(\frac{64}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{8}{5}\right)^{-1}$; 6) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{4}\right)^2$.

99. 1) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{2\frac{1}{4}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{6\frac{3}{4}}$; 3) $\sqrt[4]{15\frac{5}{8}}:\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$;

4) $\sqrt[3]{11\frac{1}{4}}:\sqrt[3]{3\frac{1}{3}}$; 5) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{27}}\right)^2$; 6) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{16}}\right)^3$.

100. Расположить числа в порядке возрастания:

1) $1^{3{,}75}$, 2^{-1}, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; 2) 98^0, $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$, $32^{\frac{1}{5}}$.

101. Сравнить числа:

1) $(0{,}88)^{\frac{1}{6}}$ и $\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}}$; 3) $(4{,}09)^{\sqrt[3]{2}}$ и $\left(4\frac{3}{25}\right)^{\sqrt[3]{2}}$;

2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}$ и $(0{,}41)^{-\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}}$ и $\left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$.

102. Упростить выражение, представив его в виде степени с основанием a:

1) $\dfrac{a^{1\frac{1}{2}}a^{-0,5}}{a^{\frac{2}{3}}}$; 2) $\dfrac{a^{-3}a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$; 3) $(a^{2,5})^2\sqrt[5]{a}$;

4) $\sqrt[7]{a^2}\left(a^{\frac{3}{14}}\right)^2$; 5) $\dfrac{(\sqrt[3]{a})^2\sqrt[6]{a}}{aa^{-\frac{1}{6}}}$; 6) $\left(\dfrac{a}{a^{\frac{3}{4}}}\right)^2$.

103. Упростить выражение:

1) $x^{-2\sqrt{2}}\cdot\left(\dfrac{1}{x^{-\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1}$; 2) $\left(\dfrac{a^{\sqrt{3}}}{b^{\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1}\cdot\dfrac{a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{-2}}$.

104. Сравнить числа:

1) $\sqrt[7]{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)^2}$ и $\sqrt[7]{\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)^2}$; 2) $\sqrt[5]{\left(1\dfrac{1}{4}-1\dfrac{1}{5}\right)^3}$ и $\sqrt[5]{\left(1\dfrac{1}{6}-1\dfrac{1}{7}\right)^3}$.

105. Решить уравнение:

1) $6^{2x}=6^{\frac{1}{5}}$; 2) $3^x=27$; 3) $7^{1-3x}=7^{10}$;

4) $2^{2x+1}=32$; 5) $4^{2+x}=1$; 6) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{4x-3}=5$.

106. Сократить дробь:

1) $\dfrac{y-16y^{\frac{1}{2}}}{5y^{\frac{1}{4}}+20}$; 2) $\dfrac{a^{\frac{4}{5}}-b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{5}}-b^{\frac{2}{5}}}$.

107. Упростить:

1) $\dfrac{ab^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-1}$; 2) $\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$.

Проверь себя!

1. Вычислить:

1) $\dfrac{15^{\frac{2}{3}}\cdot3^{\frac{7}{3}}}{5^{-\frac{1}{3}}}$; 2) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-2}-\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}+4\cdot379^0$; 3) $\left(\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\right):\sqrt[3]{2}$.

2. Упростить выражение:

1) $\sqrt[3]{\dfrac{ab^2}{c}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a^5b}{c^2}}$; 2) $\dfrac{a^{-3}\cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$.

3. Сократить дробь $\dfrac{a-9a^{\frac{1}{2}}}{7a^{\frac{1}{4}}+21}$.

4. Сравнить числа $\sqrt[5]{\left(\dfrac{2}{9}\right)^3}$ и $\sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{4}\right)^3}$.

5. Упростить выражение $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^2-(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2$.

---

108. Показать, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей, если:

1) $b_2=-81,\ S_2=162$;
3) $b_1+b_2=130,\ b_1-b_3=120$;
2) $b_2=33,\ S_2=67$;
4) $b_2+b_4=68,\ b_2-b_4=60$.

109. Записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:

1) 1,10(209);
2) 0,108(32).

110. Проверить равенство:

1) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot(2-\sqrt{3})=1$;
2) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$.

111. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$;
2) $\dfrac{\sqrt{5}}{5+\sqrt{10}}$;
3) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$;
4) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{27}}$;
5) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}$;
6) $\dfrac{11}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$;
7*) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$;
8*) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$.

112. Вычислить:

1) $(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16})$;
2) $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5})$.

Упростить выражение (113–114).

113. 1) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$;
3) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}+\sqrt[3]{y}$;
2) $\dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}-\dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$;
4) $\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}-1$.

114. 1) $\left(\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}\cdot\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}\right)^3$;
3) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}$;
2) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{ab}}\cdot\dfrac{ab^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$;
4) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\cdot\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-\sqrt[3]{a^2b^2}+b^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$.

Упростить выражение (115–116).

115. 1) $\left(\dfrac{4a^2-9a^{-2}}{2a-3a^{-1}}+\dfrac{a^2-4+3a^{-2}}{a-a^{-1}}\right)^2$; 2) $\left[\dfrac{1}{(a+b)^{-2}}-\left(\dfrac{a-b}{a^3-b^3}\right)^{-1}\right]\cdot(ab)^{-1}$.

116. 1) $\left(\dfrac{a\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{a+\sqrt[3]{a}}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2+3\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^2\right)$;

2) $\left(\dfrac{a-a^{-1}}{\left(\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{a}+1\right)\left(\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{a}-1\right)}+\sqrt[3]{a^{-1}}\right)^{-3}$;

3) $\left[\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2+\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2}{a+\sqrt{ab}}\right]^5\cdot\sqrt[3]{a^{10}\cdot\sqrt{a}}$;

4) $\left(\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{\dfrac{ab\sqrt[3]{a}+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}}\right)\cdot\dfrac{1}{a+b}$.

117*. Доказать, что:

1) $\dfrac{11-6\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

1. История действительных чисел

Еще в V в. до н. э. в школе *Пифагора* было доказано, что множества рациональных чисел не хватает для точного измерения длин любых отрезков. Одной из первых задач, выводящих на понятие несоизмеримости отрезков, была задача нахождения стороны квадрата, площадь которого равна 2. Тем самым было доказано существование несоизмеримых отрезков. Идею доказательства методом от противного факта несоизмеримости диагоналей квадрата и его сторон можно найти в «Началах» *Евклида* (IV в. до н. э.).

Все последующие после Евклида годы, вплоть до XII в., математики Индии и Востока использовали иррациональные величины для нужд математической науки и астрономии, но не признавали их за числа. В начале XII в. персидский и таджикский поэт, математик и философ *Омар Хайям* (ок. 1048 — после 1112) теоретически расширил понятие числа до положительного действительного числа. В XV в. самаркандский ученый *аль-Каши* стал применять десятичные дроби для увеличения точности извлечения корней. В 1594 г.

нидерландский математик и инженер *Симон Стевин* (1548–1620) в книге «Приближения к алгебре» показал, что десятичные дроби можно использовать для бесконечно близкого приближения к точному значению иррационального числа. Позже французский математик, философ, физик и физиолог *Рене Декарт* (1596–1650) показал, что иррациональные числа, как и рациональные, изображаются точками на числовой оси и образуют вместе с рациональными числами множество действительных чисел.

2. История числовых последовательностей

В древности уже употребляли понятие последовательности — были известны бесконечные последовательности натуральных, четных и нечетных чисел, последовательности простых чисел и обратных натуральным. Различали последовательности возрастающие и убывающие, для некоторых последовательностей умели находить выражение-формулу их общего члена. Для последовательности простых чисел формула общего члена неизвестна, но еще в III в. до н.э. александрийский ученый *Эратосфен* указал способ (названный позднее «решетом Эратосфена») получения простых чисел.

Упоминания о прогрессиях, частных видах последовательностей, восходят ко II тысячелетию до н.э. Примеры арифметических и геометрических прогрессий найдены в клинописных табличках вавилонян и в египетских папирусах. Знакомую нам формулу суммы геометрической прогрессии можно найти в «Началах» Евклида. Идея нахождения предела убывающей последовательности появилась в V–IV вв. до н.э. В книге *Архимеда* «Квадратура параболы» (III в. до н.э.) присутствует сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$a+\frac{a}{4}+\frac{a}{4^2}+\frac{a}{4^3}+\ldots=\frac{a}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}a.$$

Интересно, что лишь в 1484 г. французский математик *Н. Шюке* в своей книге «Наука о числах» дает правило для нахождения суммы любой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

3. История понятия предела

До наших дней дошли 9 *апорий* (затруднительных положений-парадоксов) элейского философа Зенона (V в. до н.э.). В апории *«Дихотомия»* (от греч. — «деление пополам») Зенон утверждал, что движение вообще невозможно, так как для того, чтобы пройти расстояние от одной точки до другой, надо сначала пройти $\frac{1}{2}$ этого расстояния, затем $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ... этого расстояния. Но последовательность таких отрезков бесконечна, значит, конечная точка пути не будет достигнута. Парадокс, представляемый как логическая безысходность, заключается в том, что рассматриваемая сумма

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

бесконечного числа слагаемых конечна.

Несмотря на то что парадоксы Зенона оставались неразрешимыми, они не уничтожили идею бесконечности в математике. Первое теоретическое исследование, в котором в неявном виде использовались предельные переходы (при вычислении площадей и объемов криволинейных фигур), было проведено древнегреческим математиком и астрономом *Евдоксом Книдским* в IV в. до н.э. В XVII в. метод Евдокса назовут методом *исчерпывания*. В нем фактически речь идет о пределе возрастающей последовательности площадей правильных вписанных многоугольников: пространство между кругом и вписываемыми в него многоугольниками как бы «исчерпывается при их «возрастании».

В начале XVIII в. многие математики, еще не имея строгой теории действительного числа, работали со степенными функциями и выводили многие свойства этих функций. Понятие же степени a^α с любым действительным показателем α окончательно сформировалось только в XIX в., когда в математику прочно вошло понятие предела.

§ 7. Показательная функция, ее свойства и график

С понятием функции вы познакомились в курсе алгебры 7—9 классов.

Если каждому значению x из некоторого множества действительных чисел поставлено в соответствие по определенному правилу число y, то говорят, что на этом множестве определена *функция*.

При этом x называют *независимой переменной* или *аргументом*, а y — *зависимой переменной* или *функцией*.

Множество значений x, для которых определены значения $y(x)$, называют *областью определения функции*.

Для обозначения функции обычно используют буквы f, g, F и т.д. Например, говорят: дана функция $y = f(x)$, или функция $g(x) = 2x - 1$, или функция $F(x) = x^2$.

Функции могут быть заданы формулами, графиками, таблицами. В 7—9 классах вы познакомились с некоторыми функциями, изучили их свойства и строили графики. Нижеприведенная таблица напомнит вам о них.

В § 6 степень была определена для любого положительного основания и любого действительного показателя. Пусть основание степени $a > 0$. Тогда каждому $x \in \boldsymbol{R}$ соответствует одно определенное число $y = a^x$. Тем самым задана функция $y = a^x$. Если $a = 1$, то функция $y = a^x$ принимает одно и то же значение $y = 1$ при всех x.

> *Функцию $y = a^x$,*
> *где $a > 0$, $a \neq 1$, называют* ***показательной функцией.***

Такое название функции объясняется тем, что ее аргументом является показатель степени.

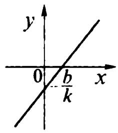
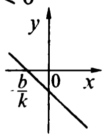
Показательная функция обладает следующими свойствами.

Свойство 1. *Область определения показательной функции $y = a^x$ — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.*

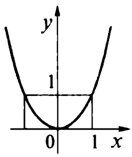
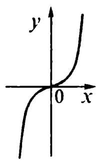
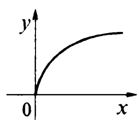
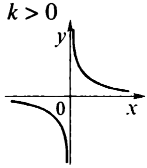
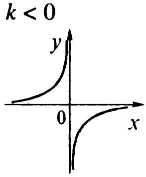
Это свойство следует из того, что степень с положительным основанием определена для любого действительного значения показателя.

Свойство 2. *Множество значений показательной функции $y = a^x$ — множество положительных чисел.*

Второе свойство следует из того, что если $a > 0$ и $a \neq 1$, то уравнение $a^x = b$ имеет корень при любом $b > 0$, т.е. функция принимает любое положительное значение. Это доказывается в курсе высшей математики.

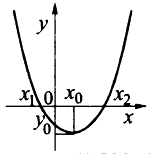
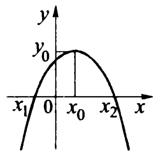
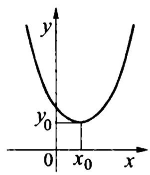
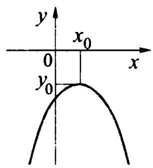
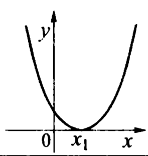
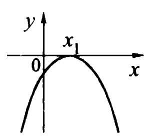
<table>
<tr><th>Функция</th><th>Область определения функции</th><th>Множество значений функции</th><th>График функции</th><th>Интервалы знакопостоянства функции</th><th>Промежутки возрастания (убывания) функции</th></tr>
<tr><td>$y = kx + b$
$k \neq 0$</td><td>R</td><td>R</td><td>$k > 0$

$k < 0$
</td><td>$y > 0$ при $x > -\frac{b}{k}$
$y < 0$ при $x < -\frac{b}{k}$
$y = 0$ при $x = -\frac{b}{k}$

$y > 0$ при $x < -\frac{b}{k}$
$y < 0$ при $x > -\frac{b}{k}$
$y = 0$ при $x = -\frac{b}{k}$</td><td>Возрастает на всей числовой прямой

Убывает на всей числовой прямой</td></tr>
<tr><td>$y = x^2$</td><td>R</td><td>$y \geqslant 0$</td><td></td><td>$y > 0$ при
$x > 0, x < 0$
$y = 0$ при $x = 0$</td><td>Возрастает на промежутке $x \geqslant 0$, убывает на промежутке $x \leqslant 0$</td></tr>
<tr><td>$y = x^3$</td><td>R</td><td>R</td><td></td><td>$y > 0$ при $x > 0$
$y < 0$ при $x < 0$
$y = 0$ при $x = 0$</td><td>Возрастает на всей числовой прямой</td></tr>
<tr><td>$y = \sqrt{x}$</td><td>$x \geqslant 0$</td><td>$y \geqslant 0$</td><td></td><td>$y > 0$ при $x > 0$
$y = 0$ при $x = 0$</td><td>Возрастает на промежутке $x \geqslant 0$</td></tr>
<tr><td>$y = \frac{k}{x}$</td><td>$x \neq 0$</td><td>$y \neq 0$</td><td>$k > 0$

$k < 0$
</td><td>$y > 0$ при $x > 0$
$y < 0$ при $x < 0$

$y > 0$ при $x < 0$
$y < 0$ при $x > 0$</td><td>Убывает на промежутках $x < 0$ и $x > 0$

Возрастает на промежутках $x < 0$ и $x > 0$</td></tr>
</table>

Функция	Область определения функции	Множество значений функции	График функции	Интервалы знакопостоянства функции	Промежутки возрастания (убывания) функции
$y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$; $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$; $x_1 \leqslant x_2$, где x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ при $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$	$\boldsymbol{R}$	$y \geqslant y_0$	$a > 0$, $D = b^2 - 4ac > 0$ 	$y > 0$ при $x < x_1$, $x > x_2$, $y < 0$ при $x_1 < x < x_2$, $y = 0$ при $x = x_1$, $x = x_2$	Возрастает на промежутке $x \geqslant x_0$, убывает на промежутке $x \leqslant x_0$
		$y \leqslant y_0$	$a < 0$, $D > 0$ 	$y > 0$ при $x_1 < x < x_2$, $y < 0$ при $x < x_1$, $x > x_2$, $y = 0$ при $x = x_1$, $x = x_2$	Возрастает на промежутке $x \leqslant x_0$, убывает на промежутке $x \geqslant x_0$
		$y \geqslant y_0$	$a > 0$, $D < 0$ 	$y > 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$	Возрастает на промежутке $x \geqslant x_0$, убывает на промежутке $x \leqslant x_0$
		$y \leqslant y_0$	$a < 0$, $D < 0$ 	$y < 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$	Возрастает на промежутке $x \leqslant x_0$, убывает на промежутке $x \geqslant x_0$
		$y \geqslant 0$	$a > 0$, $D = 0$ 	$y > 0$ при $x \neq x_1$, $y = 0$ при $x = x_1$	Возрастает на промежутке $x \geqslant x_1$, убывает на промежутке $x \leqslant x_1$
		$y \leqslant 0$	$a < 0$, $D = 0$ 	$y < 0$ при $x \neq x_1$, $y = 0$ при $x = x_1$	Возрастает на промежутке $x \leqslant x_1$, убывает на промежутке $x \geqslant x_1$

При $b \leqslant 0$ уравнение $a^x = b$ не имеет корней, так как $a^x > 0$ при любом x.

Свойство 3. Показательная функция $y = a^x$ является возрастающей, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$.

Третье свойство следует из теоремы и следствия 1, доказанных в § 6.

Задача 1. Построить график функции $y = 2^x$.

Δ Составим таблицу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Построим эти точки и проведем через них кривую, учитывая, что функция $y = 2^x$ возрастает (рис. 6). ▲

Вообще график показательной функции $y = a^x$, где $a > 1$, имеет вид, представленный на рисунке 7.

Этот график расположен выше оси Ox, так как $a^x > 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$. С возрастанием аргумента значения функции увеличиваются, так как $y = a^x$ — возрастающая функция, если $a > 1$.

Задача 2. Построить график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Δ Составим таблицу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Построим эти точки и проведем через них кривую (рис. 8). ▲

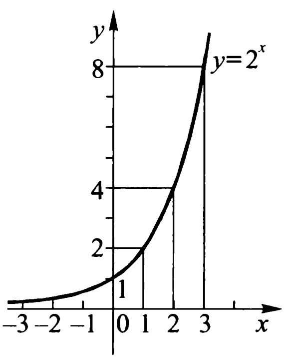


Рис. 6

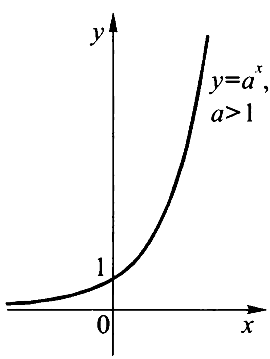


Рис. 7

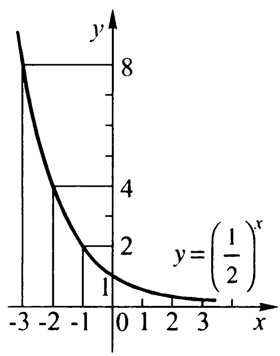


Рис. 8

Вообще график показательной функции $y = a^x$, где $0 < a < 1$, имеет вид, представленный на рисунке 9.

Этот график расположен выше оси Ox, так как $a^x > 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$. С увеличением аргумента значения функции уменьшаются, так как $y = a^x$ — убывающая функция, если $0 < a < 1$.

Из свойств 2 и 3 следует, что *уравнение* $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, *имеет единственный корень*, т.е. по заданному значению b степени a^x показатель степени x однозначно определяется. Геометрически это означает, что прямая $y = b$ пересекает график функции в одной точке, абсцисса которой является корнем уравнения $a^x = b$ (рис. 10).

Задача 3. Решить графически уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x - \frac{2}{3}$.

Δ Построим графики функций $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = x - \frac{2}{3}$ (рис. 11). Из рисунка 7 видно, что графики этих функций пересекаются в одной точке. Следовательно, данное уравнение имеет один корень — абсциссу этой точки. Из рисунка видно, что $x \approx 1$. Проверка показывает, что $x = 1$ является корнем уравнения. ▲

Показательная функция часто используется при описании различных физических процессов. Так, радиоактивный распад описывается формулой:

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_0}}, \qquad (1)$$

где $m(t)$ и m_0 — массы радиоактивного вещества соответственно в момент времени t и в начальный момент времени $t = 0$, T_0 — период полураспада (промежуток времени, за который первоначальное количество вещества уменьшается вдвое).

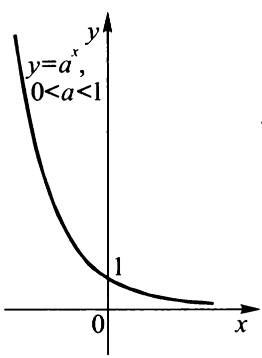


Рис. 9

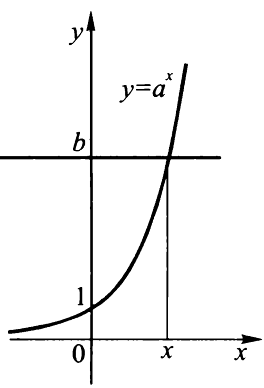


Рис. 10

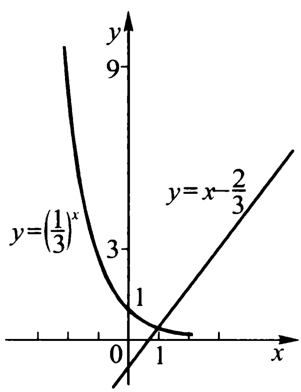


Рис. 11

С помощью показательной функции выражается давление воздуха в зависимости от высоты и подъема, ток самоиндукции в катушке после включения постоянного напряжения и т.д.

Задача 4*. Альпинист, находясь на высоте $h_1 = 1100$ м над уровнем моря определил, что давление воздуха $p_1 = 741$ мм рт. ст., а температура 15°С. Каково давление воздуха на высоте $h_2 = 2300$ м при той же температуре?

Δ Известно, что давление p_2 находится по следующей барометрической формуле:

$$p_2 \approx p_1 \cdot (0{,}8886)^{h_2 - h_1}.$$

Подставляя в эту формулу данные из условий задачи, имеем

$$p_2 \approx 741(0{,}8886)^{2300-1100}.$$

Выполнив вычисления с помощью микрокалькулятора, получим $p_2 \approx 639$ мм рт. ст. ▲

Задача 5*. Период полураспада плутония равен 140 сут. Сколько плутония останется через 10 лет, если его начальная масса 8 г?

Δ Воспользуемся формулой (1). В данной задаче $m_0 = 8$ г, $t = 10 \cdot 365$ (считаем, что в году 365 дней), $T = 140$. Тогда

$$m(3650) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3650}{140}}.$$

Выполнив вычисления с помощью микрокалькулятора, получим $m \approx 1{,}13 \cdot 10^{-7}$ г. ▲

Упражнения

118. Построить график функции:

1) $y = 3^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

119. Используя график функции (рис. 12), указать:

1) значения аргумента, при которых значение функции равно 0;

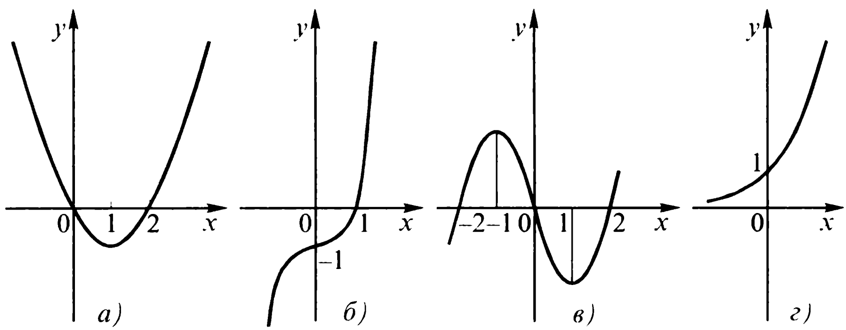


Рис. 12

2) значения аргумента, при которых функция принимает положительные (отрицательные) значения;

3) промежутки возрастания (убывания) функции.

120. Найти область определения функции:

1) $y = 3x + 2$;

2) $y = -x^2 + x - 2$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{0{,}5x-1}$;

4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{3}x - 2}$;

5) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$;

6) $g(x) = \sqrt{2x^2 + 5x - 3}$;

7) $y(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$;

8) $y(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2-x}$;

9) $y = \dfrac{1}{2x\sqrt{1-x}}$;

10) $y = \dfrac{1}{x\sqrt{1-2x}}$;

11) $y = 3^{\frac{1}{x}}$;

12) $y = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{\sqrt{x}}$;

13) $y = 2^{\sqrt{x-1}}$;

14) $y = 0{,}2^{\frac{1}{x^2}}$.

121. Построить график функции $y = 3^x$ и, используя этот график, найти приближенно:

1) $\sqrt{3}$; 2) $3^{\frac{2}{3}}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $3^{-1{,}5}$.

122. Изобразить схематически график функции:

1) $y = (0{,}4)^x$; 2) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$; 3) $y = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$; 4) $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$.

123. Для данной функции выяснить, является ли она возрастающей или убывающей:

1) $y = \left(1\dfrac{1}{3}\right)^x$; 2) $y = (0{,}57)^x$; 3) $y = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$; 4) $y = \left(3\dfrac{1}{3}\right)^{-x}$.

124. (*Устно.*) Используя свойство возрастания или убывания показательной функции, сравнить числа:

1) $1{,}7^3$ и 1; 2) $0{,}3^2$ и 1; 3) $3{,}2^{1{,}5}$ и $3{,}2^{1{,}6}$;

4) $0{,}2^{-3}$ и $0{,}2^{-2}$; 5) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1{,}4}$; 6) 3^{π} и $3^{3{,}14}$.

125. Сравнить число с 1:

1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$; 2) $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}$; 3) $(5)^{-\sqrt{5}}$; 4) $\pi^{\frac{2}{5}}$; 5) $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{-\sqrt{3}}$; 6) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$.

126. На одном рисунке построить графики функций:

1) $y = 2^{-x}$ *и* $y = 2^x$;

2) $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ и $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-x}$.

127. Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y=2^x$ и $y=8$;

2) $y=3^x$ и $y=\frac{1}{3}$;

3) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ и $y=\frac{1}{16}$;

4) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y=9$.

128. (*Устно.*) Решить уравнение:

1) $5^x=\frac{1}{5}$; 2) $7^x=49$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\sqrt{3}$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^x=\sqrt[3]{7}$.

129. Решить графически уравнение:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=x+1$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=x-\frac{1}{2}$;

3) $2^x=3x-2$;

4) $3^x=1\frac{1}{3}-x$.

130. Используя графики функций, решить неравенство:

1) $3^x<1$; 2) $2^x>1$; 3) $4^x>4$; 4) $4^x<\frac{1}{4}$.

131. Решить графически неравенство:

1) $2^x>-x+3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x\leqslant x+4$.

---

132. Выяснить, возрастающей или убывающей является функция:

1) $y=2^{x-1}$;

2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$;

3) $y=0{,}2^x\cdot 8^x$;

4) $y=\left(\frac{3}{5}\right)^x\cdot\left(1\frac{2}{3}\right)^{-x}$.

133. Найти множество значений функции:

1) $y=2^x$; 2) $y=(0{,}2)^x$; 3) $y=2^x+1$;

4) $y=2-0{,}2^x$; 5) $y=2^{|x|}$; 6) $y=2^{|x+1|}$.

134. Построить график функции:

1) $y=3^x-2$; 2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+3$; 3) $y=2^{x+1}$; 4) $y=3^{x-2}$.

135. Доказать, что графики функций $y=2^x$ и $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ симметричны относительно оси ординат.

136. Построить график функции:

1) $y=2^{|x|}$; 2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$; 3) $y=|3^x-2|$; 4) $y=2-3^x$.

137*. При радиоактивном распаде количество вещества уменьшается вдвое за сутки. Сколько вещества останется от 250 г через 1,5 сут.; 3,5 сут.? Вычисления провести на микрокалькуляторе.

138*. На лесном участке можно заготовить $4 \cdot 10^5$ м^3 древесины. Ежегодный прирост деревьев составляет 4%. Сколько можно заготовить древесины на этом участке через 5 лет? Вычисления провести на микрокалькуляторе.

§ 8. Показательные уравнения и неравенства

Рассмотрим несколько примеров показательных уравнений и неравенств, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

Решение таких показательных уравнений часто сводится к решению уравнения

$$a^x = a^b,$$

где $a > 0$; $a \neq 1$. Так как из равенства степеней с одинаковыми основаниями следует равенство показателей, то уравнение имеет единственный корень $x = b$.

Например, уравнение $3^x = 81$, т.е. уравнение $3^x = 3^4$, имеет единственный корень $x = 4$.

Задача 1. Решить уравнение $4 \cdot 2^x = 1$.

Δ Запишем уравнение в виде $2^{x+2} = 2^0$, откуда $x + 2 = 0$.

Ответ. $x = -2$. ▲

Задача 2. Решить уравнение $2^{3x} \cdot 3^x = 576$.

Δ Так как $2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$, $576 = 24^2$, то уравнение можно записать в виде $8^x \cdot 3^x = 24^2$ или в виде $24^x = 24^2$. Отсюда $x = 2$.

Ответ. $x = 2$. ▲

Задача 3. Решить уравнение $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$.

Δ Вынося в левой части за скобки общий множитель 3^{x-2}, получим $3^{x-2}(3^3 - 2) = 25$;

$3^{x-2} \cdot 25 = 25$, откуда $3^{x-2} = 1$, $x - 2 = 0$, $x = 2$.

Ответ. $x = 2$. ▲

Задача 4. Решить уравнение $3^x = 7^x$.

Δ Так как $7^x \neq 0$, то уравнение можно представить в виде $\frac{3^x}{7^x} = 1$, откуда $\left(\frac{3}{7}\right)^x = 1$, $x = 0$.

Ответ. $x = 0$. ▲

Задача 5. Решить уравнение $3 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5^x + 2^{x-2}$.

Δ Запишем уравнение в виде $3 \cdot 2^{x+1} - 2^{x-2} = 5^x - 2 \cdot 5^{x-2}$, откуда $2^{x-2}(3 \cdot 2^3 - 1) = 5^{x-2}(5^2 - 2)$, $2^{x-2} \cdot 23 = 5^{x-2} \cdot 23$, $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = 1$, $x - 2 = 0$.

Ответ. $x = 2$. ▲

З а д а ч а 6. Решить уравнение $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$.

Δ Заменой $3^x = t$ данное уравнение сводится к квадратному уравнению

$$t^2 - 4t - 45 = 0.$$

Решая это уравнение, находим его корни $t_1 = 9$, $t_2 = -5$, откуда $3^x = 9$, $3^x = -5$. Уравнение $3^x = 9$ имеет корень $x = 2$, а уравнение $3^x = -5$ не имеет корней, так как показательная функция не может принимать отрицательные значения.

О т в е т. $x = 2$. ▲

З а д а ч а 7*. Найти все значения a, при которых уравнение

$$9^x - a3^x + 3 - a = 0 \qquad (1)$$

имеет хотя бы один действительный корень.

Δ Пусть $3^x = t$, тогда уравнение (1) примет вид

$$t^2 - at + 3 - a = 0. \qquad (2)$$

Задача равносильна следующей: найти все значения a, при которых уравнение (2) имеет хотя бы один положительный корень. Дискриминант квадратного уравнения (2) $D = a^2 - 4(3 - a) = a^2 + 4a - 12 = (a + 6)(a - 2)$ неотрицателен при $a \leqslant -6$ и при $a \geqslant 2$.

Если $a \leqslant -6$, то $-a > 0$, $3 - a > 0$ и по теореме, обратной теореме Виета, оба корня уравнения (2) отрицательны.

Пусть $a \geqslant 2$. Тогда при $2 \leqslant a < 3$ оба корня уравнения (2) положительны ($-a < 0$, $3 - a > 0$); при $a = 3$ один из корней равен нулю, а другой равен 3); если $a > 3$, то $3 - a < 0$ и поэтому корни уравнения (2) имеют разные знаки (один из них положителен, а другой — отрицателен).

О т в е т. $a \geqslant 2$. ▲

Рассмотрим теперь примеры решения показательных неравенств. Такие неравенства часто сводятся к простейшим неравенствам

$$a^x > a^b,\ a^x < a^b.$$

При решении таких неравенств используется свойство возрастания функции a^x при $a > 1$ и убывания при $0 < a < 1$.

З а д а ч а 8. Решить неравенство $3^x < 81$.

Δ Запишем неравенство в виде $3^x < 3^4$.

Так как $3 > 1$, то функция $y = 3^x$ является возрастающей. Следовательно, при $x < 4$ выполняется неравенство $3^x < 3^4$, а при $x \geqslant 4$ выполняется неравенство $3^x \geqslant 3^4$. Таким образом, при $x < 4$ неравенство является верным, а при $x \geqslant 4$ — неверным, т.е. неравенство $3^x < 81$ выполняется только тогда, когда $x < 4$.

Ответ. $x < 4$. ▲

Задача 9. Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt{8}$.

Δ Запишем неравенство в виде

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^{\frac{3}{2}}, \text{ или } \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Так как $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ — убывающая функция, то $x < -\frac{3}{2}$.

Ответ. $x < -\frac{3}{2}$. ▲

Задача 10. Решить неравенство $16^x + 4^x - 2 > 0$.

Δ Обозначим $4^x = t$, тогда неравенство запишется в виде

$$t^2 + t - 2 > 0.$$

Это неравенство выполняется при $t < -2$ и при $t > 1$. Так как $t = 4^x$, то получим два неравенства: $4^x < -2$ и $4^x > 1$. Первое не имеет решений, так как $4^x > 0$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$. Второе неравенство можно записать в виде $4^x > 4^0$, откуда $x > 0$.

Ответ. $x > 0$. ▲

Упражнения

Решить уравнение (139–145).

139. 1) $4^{x-1} = 1$; 2) $0{,}3^{3x-2} = 1$; 3) $2^{2x} = 2^{4\sqrt{3}}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

140. 1) $27^x = \frac{1}{3}$; 2) $400^x = \frac{1}{20}$; 3) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{81}$.

141. 1) $3 \cdot 9^x = 81$; 2) $2 \cdot 4^x = 64$; 3) $3^{x+\frac{1}{2}} \cdot 3^{x-2} = 1$;

4) $0{,}5^{x+7} \cdot 0{,}5^{1-2x} = 2$; 5) $0{,}6^{x+3} = 0{,}6^{2x-5}$; 6) $6^{3x-1} = 6^{1-2x}$.

142. 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x-1} \cdot 8^x = 32$; 3) $36 \cdot 6^{x^2} = 36^x \cdot 6^3$;

2) $2^{x^2} = 4^{x-\frac{1}{2}}$; 4) $8^{x+2} = 2 \cdot 64^x$.

143. 1) $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$; 4) $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 63$;

2) $2^{3x+2} - 2^{3x-2} = 30$; 5) $7 \cdot 2^{x+1} + 2^x - 2^{x+1} = 52$;

3) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$; 6) $25 \cdot 3^x - 10 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+2} = 36$.

144. 1) $5^x = 8^x$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; 3) $3^x = 5^{2x}$; 4) $4^x = 3^{\frac{x}{2}}$.

145. Решить уравнение:

1) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$;
2) $16^x - 17 \cdot 4^x + 16 = 0$;
3) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$;
4) $64^x - 8^x - 56 = 0$.

146. Решить неравенство:

1) $3^x > 9$;
2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$;
3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 2$;
4) $4^x < \frac{1}{2}$;
5) $2^{3x} \geqslant \frac{1}{2}$;
6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \leqslant \frac{1}{9}$.

Решить уравнение (**147–155**).

147. 1) $3^{x^2+x-12} = 1$;
3) $2^{\frac{x-1}{x-2}} = 4$;
2) $2^{x^2-7x+10} = 1$;
4) $0{,}5^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{1}{x+1}}$.

148. 1) $0{,}3^{x^3-x^2+x-1} = 1$;
3) $5{,}1^{\frac{1}{2}(x-3)} = 5{,}1\sqrt{5{,}1}$;
2) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x+3} = 1$;
4) $100^{x^2-1} = 10^{1+5x}$.

149. 1) $10^x = \sqrt[3]{100}$;
4) $10^x = \frac{1}{\sqrt[4]{10000}}$;
2) $10^x = \sqrt[5]{10000}$;
5) $\left(\sqrt{10}\right)^x = 10^{x^2-x}$;
3) $225^{2x^2-24} = 15$;
6) $100^{x^2-1} = 10^{1-5x}$.

150. 1) $2^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}x} = \sqrt[4]{8}$;
3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{1-x}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$;
2) $5^{0,1x} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-0,06} = 5^{x^2}$;
4) $0{,}7^{\sqrt{x+12}} \cdot 0{,}7^{-2} = 0{,}7^{\sqrt{x}}$.

151. 1) $2^{x^2} \cdot 5^{x^2} = 100$;
3) $27^x \cdot 2^{3x} = 36$;
2) $0{,}3^{x^3} \cdot 7^{x^3} = \frac{10}{21}$;
4) $3^{2\sqrt{x}} \cdot 25^{\sqrt{x}} = 225$.

152. 1) $7^x - 7^{x-1} = 6$;
3) $5^{3x} + 3 \cdot 5^{3x-2} = 140$;
2) $3^{2y-1} + 3^{2y-2} - 3^{2y-4} = 315$;
4) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$.

153. 1) $7^{x-2} = 3^{2-x}$;
3) $3^{\frac{x+2}{4}} = 5^{x+2}$;
2) $2^{x-3} = 3^{3-x}$
4) $4^{\frac{x-3}{2}} = 3^{2(x-3)}$.

154. 1) $3^{x+3} + 3^x = 7^{x+1} + 5 \cdot 7^x$;
2) $3^{x+4} + 3 \cdot 5^{x+3} = 5^{x+4} + 3^{x+3}$;
3) $2^{8-x} + 7^{3-x} = 7^{4-x} + 2^{3-x} \cdot 11$;
4) $2^{x+1} + 2^{x-1} - 3^{x-1} = 3^{x-2} - 2^{x-3} + 2 \cdot 3^{x-3}$.

155. 1) $8 \cdot 4^x - 6 \cdot 2^x + 1 = 0$;

2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x - 6 = 0$;

3) $13^{2x+1} - 13^x - 12 = 0$;

4) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$;

5) $2^{3x} + 8 \cdot 2^x - 6 \cdot 2^{2x} = 0$;

6) $5^{3x+1} + 34 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 5^x = 0$.

Решить неравенство (156–158).

156. 1) $5^{x-1} \leqslant \sqrt{5}$; 2) $3^{\frac{x}{2}} > 9$; 3) $3^{x^2-4} \geqslant 1$;

4) $2^{-x^2+3x} < 4$; 5) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geqslant \frac{9}{7}$; 6) $\left(\frac{13}{11}\right)^{x^2-3x} < \frac{121}{169}$.

157. 1) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$;

2) $2^{x-1} + 2^{x+3} > 17$;

3) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geqslant 448$;

4) $5^{3x+1} - 5^{3x-3} \leqslant 624$.

158. 1) $9^x - 3^x - 6 > 0$;

2) $4^x - 2^x < 12$;

3) $5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x - 1 > 0$;

4) $3 \cdot 9^x + 11 \cdot 3^x < 4$.

159. Решить графически уравнение:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x - \frac{1}{2}$;

3) $2^x = -x - \frac{7}{4}$;

4) $3^x = 11 - x$.

160. Решить графически неравенство:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant x + 1$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < x - \frac{1}{2}$;

3) $2^x \leqslant 9 - \frac{1}{3}x$;

4) $3^x > -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.

161. Решить графически уравнение:

1) $2^x = 3 - 2x - x^2$;

2) $3^{-x} = \sqrt{x}$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = -\frac{3}{x}$;

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x^3 - 1$.

162. При каких значениях x сумма чисел 2^{x-1}, 2^{x-4} и 2^{x-2} равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии 6,5; 3,25; 1,625; ... ?

Решить уравнение (163–165).

163. 1) $3^{2x+6} = 2^{x+3}$;

2) $5^{x-2} = 4^{2x-4}$;

3) $2^x \cdot 3^x = 36^{x^2}$;

4) $9^{-\sqrt{x-1}} = \frac{1}{27}$.

164. 1) $3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$;

2) $25^x + 13 \cdot 10^x = 7 \cdot 2^{2x+1}$.

165. 1) $81^{|x^2-1|} = 27$;

2) $5^{|2x-6|} = 25^{1,5x-4}$.

Решить неравенство (166–167).

166. 1) $0{,}4^x - 2{,}5^{x+1} > 1{,}5$;   3) $\frac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$;

2) $25 \cdot 0{,}04^{\,2x} > 0{,}2^{x(3-x)}$;   4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 32 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-1} < 0$.

167. $\sqrt{27} \cdot 3^{-6x^2} \geqslant 9^{4x}$.

168*. Найти все целые значения a, при которых функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x+a^2-3a}$ принимает значения, меньшие 3.

169*. Найти значения a, при которых имеет корни уравнение:

1) $a \cdot 9^x + 9^x + 4 \cdot 3^x + a - 2 = 0$;

2) $a \cdot 4^x - 4^x - 4 \cdot 2^x + a + 2 = 0$.

Упражнения к главе II

170. Сравнить числа:

1) $4^{-\sqrt{3}}$ и $4^{-\sqrt{2}}$;   3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$;

2) $2^{\sqrt{3}}$ и $2^{1,7}$;   4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}$ и $\left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$.

171. Сравнить с единицей число:

1) $2^{-\sqrt{5}}$;   2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$;   3) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$;   4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}$.

172. (*Устно.*) Является ли функция возрастающей или убывающей:

1) $y = 0{,}78^x$;   2) $y = 1{,}69^x$;   3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$;   4) $y = 4^{-x}$?

173. В каком промежутке находятся значения функции при $x \in [-1; 2]$:

1) $y = 5^x$;   2) $y = 5^{-x}$?

Решить уравнение (174–178).

174. 1) $5^{x^2-9} - 1 = 0$;   2) $2^{x^2-1} = 1$;   3) $1{,}5^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$;

4) $0{,}75^{2x-3} = \left(1\frac{1}{3}\right)^{5-x}$;   5) $5^{x^2-5x-6} = 1$;   6) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-2} = \frac{1}{7}$.

175. 1) $10^{x^2-3} = 0{,}01$;   3) $2^{4x^2} = 4^{2x-1,5}$;

2) $5^{x^2-5} = \frac{1}{625^x}$;   4) $16^{x^2} = 64^{3-x}$.

176. 1) $2^x + 2^{x-3} = 18$;   5) $2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 3^x = 9$;

2) $3^x + 4 \cdot 3^{x+1} = 13$;   6) $5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x-1} - 6 \cdot 5^x + 10 = 0$;

3) $7^x + 2 \cdot 7^{x+1} = 15$;   7) $3^{x+3} - 3^{x+1} + 3^x = 75$;

4) $5 \cdot 2^{x-2} + 3 \cdot 2^{x+1} = 29$;   8) $3^{x+1} + 5 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^{x-1} = 21$.

177. 1) $5^{2x}-5^x-600=0$; 3) $3^x+9^{x-1}-810=0$;
2) $9^x-3^x-6=0$; 4) $4^x+2^{x+1}-80=0$.

178. 1) $2\cdot 16^x-3\cdot 4^x=2$; 3) $3\cdot 81^x-8\cdot 9^x=3$;
2) $2\cdot 4^x+2\cdot 2^x-4=0$; 4) $4\cdot 16^x-17\cdot 4^x+4=0$.

179. Решить неравенство:

1) $3^{x-2}>9$; 3) $0{,}7^{x^2+2x}<0{,}7^3$;

2) $5^{2x}<\frac{1}{25}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}>\frac{1}{81}$.

180. Решить графически уравнение:

1) $2^{-x}=3x+10$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=2x+5$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Построить схематически графики функций:

$$y=\left(\frac{1}{5}\right)^x \text{ и } y=5^x.$$

2. Сравнить числа: $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,2}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,2}$; $5^{-0,2}$ и $5^{-1,2}$.

3. Решить уравнение:

$3^{x+1}=27^{x-1}$; $0{,}2^{x^2+4x-5}=1$;

$2^{x+3}-2^{x+1}=12$; $4\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+1=0$.

4. Решить неравенство:

$$7^{x-2}>49;\quad (0{,}5)^{x^2-2}\geqslant\frac{1}{4}.$$

---

181. Доказать, что последовательность значений функции $y=2^x$ при натуральных значениях x составляет геометрическую прогрессию.

182. За первый год работы предприятие имело a рублей прибыли. В дальнейшем каждый год прибыль увеличивалась на $p\%$. Какой станет прибыль предприятия за n-й год работы?

183. Найти область определения функции:

1) $y=2^{\sqrt{3-x}}$; 3) $y=0{,}2^{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$;

2) $y=3^{\frac{1}{x+2}}$; 4) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}$.

184. Найти множество значений функции:

1) $y=3^{x-1}$; 2) $y=1-3^x$; 3) $y=2^{x-1}$; 4) $y=0{,}5^{1-x}+2$.

185. Построить график функции:

1) $y = 3^x - 1$; 2) $y = 3^{x-1}$; 3) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 2$; 4) $y = 2^{2-x} + 3$.

Решить уравнение (186–188).

186. 1) $0{,}6^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$; 2) $16\sqrt{0{,}25^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}}$.

187. 1) $2 \cdot 3^{3x-1} + 27^{x-\frac{2}{3}} = 9^{x-1} + 2 \cdot 3^{2x-1}$;

2) $2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} = 12 + 2^{\sqrt{x}-1}$;

3) $22 \cdot 9^{x-1} - \frac{1}{3} \cdot 3^{x+3} + \frac{1}{3} \cdot 3^{x+2} = 4$;

4) $5 \cdot 4^{x-1} - 16^x + 0{,}25 \cdot 2^{2x+2} + 7 = 0$.

188. 1) $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3 \cdot 5^x$;

2) $5^{2x} - 7^x - 5^{2x} \cdot 17 + 7^x \cdot 17 = 0$;

3) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$;

4) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$.

189. Решить неравенство:

1) $8 \cdot 4^{\frac{x-3}{x^2+1}} < 1$; 3) $\frac{4^x - 2^{x+1} + 8}{2^{1-x}} < 8^x$;

2) $2^{x^2} \cdot 5^{x^2} < 10^{-3}(10^{3-x})^2$; 4) $\frac{1}{3^x + 5} \leqslant \frac{1}{3^{x+1} - 1}$.

190. Построить график функции:

1) $y = 2^{x+|x|}$; 2) $y = |3^{|x|} - 3|$.

Решить уравнение (191–194).

191. 1) $\frac{0{,}2^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0{,}04^x$; 3) $2 \cdot 4^x - 3 \cdot 10^x - 5 \cdot 25^x = 0$;

2) $4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x = 5 \cdot 3^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{x}{2}}$; 4) $4 \cdot 9^x + 12^x - 3 \cdot 16^x = 0$.

192*. 1) $4^x + 25^x = 29$; 2) $3^x + 4^x = 91$.

193. 1) $2^{|x+5|} = 8$; 3) $3^{|x-1|} = 3^{|x-2|}$;

2) $5^{|2-x|} = 125$; 4) $4^{|3+x|} = 4^{|x-2|}$.

194*. $2^{|x+1|} - |2^x - 1| = 1 + 2^x$.

Решить неравенство (**195–196**).

195. 1) $3^{|x-2|} < 9$; 3) $2^{|x-2|} > 4^{|x+1|}$;

2) $4^{|x+1|} > 16$; 4) $5^{|x+4|} < 25^{|x|}$.

196. 1) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-\frac{x^2}{2}} \geqslant 3^{|3x-12|+2x}$; 2) $\frac{9^{x+0,5}+1}{3-3^{2x}} \leqslant 3^{2x}+1$.

Историческая справка

В письмах немецкого философа, физика-изобретателя и математика *Г. Лейбница* (1646—1716) к голландскому ученому *Х. Гюйгенсу* (1629—1695), датированных 1679 г., можно найти использование (без пояснений) переменной величины в показателе степени.

Начиная с XVIII в. европейские математики, еще не имея строгой теории действительных чисел, изучали отдельные свойства показательной функции. В XIX в., после того как в математике упрочилось понятие предела и было введено понятие степени с действительным показателем, удалось строго обосновать и свойства показательной функции.

Теория показательной функции имеет огромное прикладное значение. Известно, что многие природные и общественные явления происходят по законам показательной функции. Например, при радиоактивном распаде вещества его масса уменьшается за равные промежутки времени в одно и то же число раз. Если через T_0 обозначить период полураспада вещества, то через T лет оставшаяся масса вещества M выражается формулой $M = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{T}{T_0}}$, где M_0 — первоначальная масса. Размножение живых организмов в природе также находится в показательной зависимости от времени.

§ 9. Степенная функция, ее свойства и график

Вы знакомы с функциями $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$ и т.д. Все эти функции являются частными случаями *степенной функции*, т.е. функции

$$y = x^p, \tag{1}$$

где p — заданное действительное число.

Свойства и график степенной функции (1) существенно зависят от свойств степени с действительным показателем и, в частности, от того, при каких значениях x и p имеет смысл степень x^p.

Перейдем к подробному рассмотрению различных случаев в зависимости от показателя степени p.

1. Показатель $p = 2n$ — четное натуральное число.

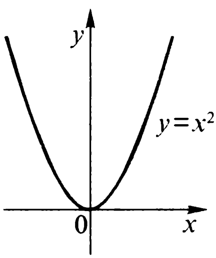


Рис. 13, *а*

В этом случае степенная функция $y = x^{2n}$, где n — натуральное число, обладает следующими свойствами:

— область определения — все действительные числа, т.е. множество $\boldsymbol{R}$;

— множество значений — неотрицательные числа, т.е. $y \geqslant 0$;

— функция $y = x^{2n}$ — четная, так как $(-x)^{2n} = x^{2n}$;

— является убывающей на промежутке $x \leqslant 0$ и возрастающей — на промежутке $x \geqslant 0$.

График функции $y = x^{2n}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^2$ (рис. 13, *а*).

2. Показатель $p = 2n - 1$ — нечетное натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{2n-1}$, где n — натуральное число, обладает следующими свойствами:

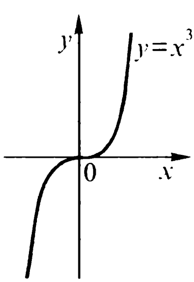


Рис. 13, *б*

— область определения — множество $\boldsymbol{R}$;

— множество значений — множество $\boldsymbol{R}$;

— функция $y = x^{2n-1}$ — нечетная, так как $(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$;

— является возрастающей на всей действительной оси.

График функции $y = x^{2n-1}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^3$ (рис. 13, *б*).

3. Показатель $p = -2n$, где n — натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$ обладает следующими свойствами:

— область определения — множество R, кроме $x = 0$;

— множество значений — положительные числа $y > 0$;

— функция $y = \frac{1}{x^{2n}}$ — четная, так как $\frac{1}{(-x)^{2n}} = \frac{1}{x^{2n}}$;

— является возрастающей на промежутке $x < 0$ и убывающей на промежутке $x > 0$.

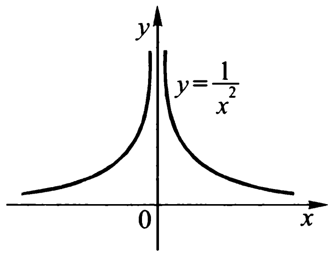


Рис. 14, *а*

График функции $y = \frac{1}{x^{2n}}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = \frac{1}{x^2}$ (рис. 14, *а*).

4. Показатель $p = -(2n - 1)$, где n — натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{-2(n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$ обладает следующими свойствами:

— область определения — множество R, кроме $x = 0$;

— множество значений — множество R, кроме $y = 0$;

— функция $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$ — нечетная, так как $\frac{1}{(-x)^{2n-1}} = -\frac{1}{x^{2n-1}}$;

— является убывающей на промежутках $x < 0$ и $x > 0$.

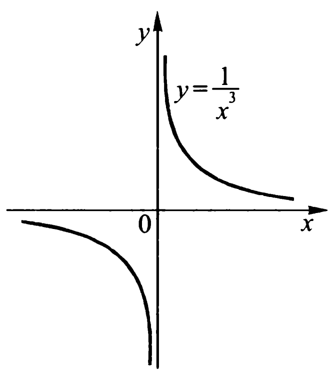


Рис. 14, *б*

График функции $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = \frac{1}{x^3}$ (рис. 14, *б*).

5. Показатель p — положительное действительное нецелое число.

В этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:

— область определения — неотрицательные числа $x \geqslant 0$;

— множество значений — неотрицательные числа $y \geqslant 0$;

— является возрастающей на промежутке $x \geqslant 0$.

График функции $y = x^p$, где p — положительное нецелое число, имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^{\frac{1}{3}}$ (при $0 < p < 1$) или, как, например, график функции $y = x^{\frac{4}{3}}$ (при $p > 1$) (рис. 15, *а—б*).

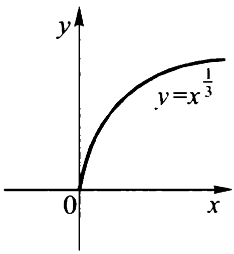


Рис. 15, *а*

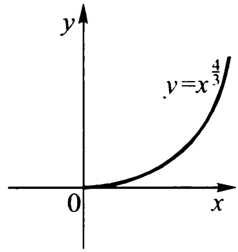


Рис. 15, *б*

6. Показатель p — отрицательное действительное нецелое число.

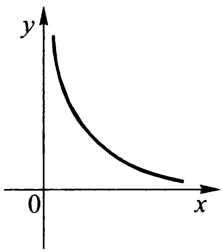


Рис. 15, *в*

В этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:

— область определения — положительные числа $x > 0$;

— множество значений — положительные числа $y > 0$;

— является убывающей на промежутке $x > 0$.

График функции $y = x^p$, где p — отрицательное нецелое число, имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ (рис. 15, *в*).

З а д а ч а 1. Решить неравенства:

1) $x^{\frac{1}{3}} > x$; 2) $x^{\frac{4}{3}} > x$.

Δ 1) Неравенство $x^{\frac{1}{3}} > x$ имеет смысл при $x \geqslant 0$. При $x = 0$ неравенство не выполняется. При $x > 0$, возводя неравенство в куб, получаем

$$x > x^3, \quad \text{т.е.} \quad x(1 - x^2) > 0.$$

Так как $x > 0$, то $1 - x^2 > 0$, откуда $x^2 < 1$, $|x| < 1$. Следовательно, $0 < x < 1$.

2) Аналогично, возводя неравенство $x^{\frac{4}{3}} > x$ при $x > 0$ в куб, получаем

$$x^4 > x^3, \quad \text{т.е.} \quad x^3(x - 1) > 0.$$

Так как $x > 0$, то $x - 1 > 0$, т.е. $x > 1$.

Ответ. 1) $0 < x < 1$; 2) $x > 1$. ▲

Решение этой задачи показывает, что график функции $y = x^{\frac{1}{3}}$ лежит выше графика функции $y = x$ при $0 < x < 1$ и ниже — при $x > 1$ (рис. 16, *а*); график функции $y = x^{\frac{4}{3}}$ лежит выше графика функции $y = x$ при $x > 1$ и ниже — при $0 < x < 1$ (рис. 16, *б*).

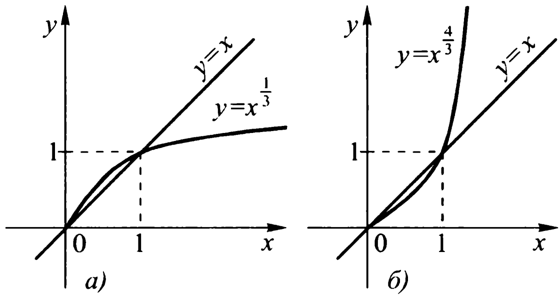


Рис. 16

Задача 2. Сравнить числа $(3{,}2)^{3-\pi}$ и $(3{,}5)^{3-\pi}$.

Δ Так как $3 < \pi < 4$, то $3 - \pi < 0$. Функция $y = x^{3-\pi}$ убывает на промежутке $x > 0$. Поэтому

$$(3{,}2)^{3-\pi} > (3{,}5)^{3-\pi}. \ ▲$$

Задача 3*. Найти точки пересечения графиков функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = x^{\frac{4}{3}}$.

Δ Для нахождения точек пересечения этих графиков решим уравнение

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{4}{3}}.$$

Левая часть этого уравнения имеет смысл при всех x, а правая — только при $x \geqslant 0$.

При $x \geqslant 0$ функция $y = \sqrt[3]{x}$ совпадает с функцией $y = x^{\frac{1}{3}}$, поэтому уравнение можно представить в следующем виде:

$$x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}}.$$

Возводя это уравнение (при $x \geqslant 0$) в куб, получаем

$$x = x^4,$$

откуда $x(x^3 - 1) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Ответ. (0; 0), (1; 1). ▲

З а д а ч а 4*. Построить график функции

$$y = 1 + |x|^{\frac{1}{3}}.$$

Δ Заметим, что эта функция четная, так как $|-x| = x$. Поэтому достаточно построить ее график для $x \geqslant 0$, а затем симметрично отразить его относительно оси ординат.

При $x \geqslant 0$ имеем $y = 1 + |x|^{\frac{1}{3}} = 1 + x^{\frac{1}{3}}$. Строим график функции $y = x^{\frac{1}{3}}$ (при $x \geqslant 0$), сдвигаем его вверх на единицу и отражаем полученный график относительно оси ординат (рис. 17). ▲

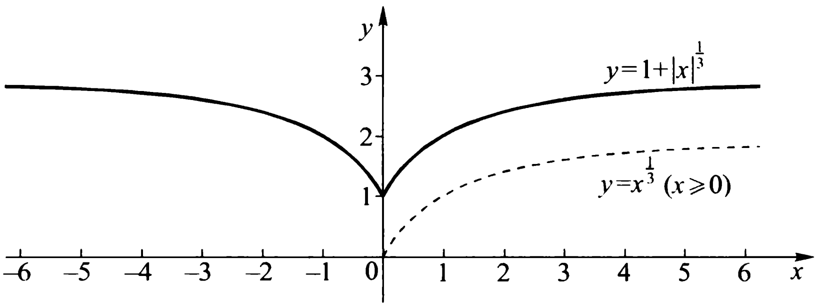


Рис. 17

Упражнения

197. Изобразить схематически график функции и указать ее область определения и множество значений:

1) $y = x^4$; 2) $y = x^5$; 3) $y = x^{\frac{1}{2}}$;

4) $y = x^{-3}$; 5) $y = x^{-2}$; 6) $y = x^{\frac{1}{3}}$.

198. (*Устно.*) Является ли функция $y = x^p$ возрастающей (убывающей), если:

1) $p = \sqrt{3}$; 2) $p = \frac{2}{e}$; 3) $p = 1 - \sqrt{5}$;

4) $p = \frac{1}{\pi}$; 5) $p = 2 - \pi$; 6) $p = e$?

199. Изобразить схематически график функции:

1) $y = x^{\frac{2}{5}}$; 2) $y = x^{\frac{5}{2}}$; 3) $y = x^{-3}$; 4) $y = x^{\sqrt{2}}$.

200. Пользуясь свойствами степенной функции, сравнить с единицей:

1) $4{,}1^{2,7}$; 2) $0{,}2^{0,3}$; 3) $0{,}7^{9,1}$; 4) $\left(\sqrt{3}\right)^{0,2}$.

201. Пользуясь рисунком 15, *б*, найти промежутки, на которых графики функций: 1) $y = x^{\sqrt{2}}$; 2) $y = x^{\pi}$ — лежат выше (ниже) графика функции $y = x$.

202. Пользуясь рисунком 15, *а*, найти промежуток, на котором графики функций: 1) $y = x^{\frac{1}{\pi}}$; 2) $y = x^{\sin 45^\circ}$ — лежат выше (ниже) графика функции $y = x$.

203. Сравнить значения выражений:

1) $3{,}1^{7,2}$ и $4{,}3^{7,2}$; 5) $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{8}{10}\right)^{-2}$;

2) $\left(\frac{10}{11}\right)^{2,3}$ и $\left(\frac{12}{11}\right)^{2,3}$; 6) $\left(\frac{14}{15}\right)^{\frac{3}{4}}$ и $\left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$;

3) $0{,}3^{0,3}$ и $0{,}2^{0,3}$; 7) $\left(4\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{5}}$ и $\left(3\sqrt{4}\right)^{\frac{2}{5}}$;

4) $2{,}5^{-3,1}$ и $2{,}6^{-3,1}$; 8) $\left(2\sqrt[3]{6}\right)^{-0,2}$ и $\left(6\sqrt[3]{2}\right)^{-0,2}$.

204. В одной системе координат построить графики функций:

1) $y = x^3$ и $y = x^{\frac{1}{3}}$; 3) $y = x^2$ и $y = x^{-2}$;

2) $y = x^4$ и $y = x^{\frac{1}{4}}$; 4) $y = x^5$ и $y = x^{-5}$.

---

205. Пользуясь рисунком 15, *в*, найти промежуток, на котором графики функций:

1) $y = x^{1-e}$; 2) $y = x^{1-\sqrt{2}}$

лежат выше (ниже) графика функции $y = x$.

206. Изобразить схематически график функции:

1) $x = x^{\pi} + 1$; 2) $y = x^{\frac{1}{e}} - 1$; 3) $y = (x-2)^{e}$;

4) $y = (x+1)^{-\sqrt{2}}$; 5) $y = 2 + x^{-1}$; 6) $y = (x-2)^{-2}$;

7) $y = 3x^{\frac{1}{\pi}}$; 8) $y = \frac{2}{x^{\sqrt{2}}}$.

207*. Построить график функции:

1) $y = |x|^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = |x|^5$; 3) $y = |x|^3 + 1$;

4) $y = |x|^{\frac{1}{5}} - 2$; 5) $y = |x - 1|^3$; 6) $y = |x+2|^{\frac{1}{3}}$;

7) $y = \dfrac{|x+1|^{\frac{1}{2}}}{3}$; 8) $y = |2x|^{-3}$.

208*. Используя графики функций, выяснить, сколько корней имеет уравнение:

1) $x^{-3} = 3^x - 2$; 2) $x^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{5}\right)^x - 3$.

§ 10. Взаимно обратные функции

Если задана функция $y = f(x)$, то для каждого значения x из области определения функции можно найти соответствующее значение y. Нередко приходится решать обратную задачу — по данному значению функции y находить соответствующее значение аргумента x.

Примером может служить формула $v = v_0 - gt$, которая выражает зависимость скорости v движения тела, брошенного вверх с начальной скоростью v_0, от времени движения t. Из этой формулы можно найти обратную зависимость — времени t от скорости v:

$$t = \frac{v_0 - v}{g}.$$

В рассмотренном примере каждому значению функции соответствует одно определенное значение аргумента. Для таких функций можно выразить обратную зависимость значений аргумента от значений функции. Поэтому такие функции называют обратимыми.

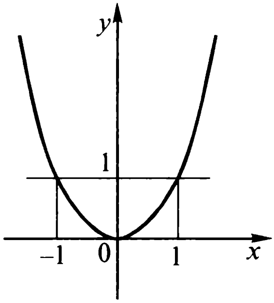


Рис. 18

Если функция $y = f(x)$ принимает каждое свое значение y только при одном значении x, то эту функцию называют ***обратимой.***

Например, функция $y = 2x - 2$ обратима, так как каждое значение y принимается при единственном значении аргумента x. Это значение можно найти, решая уравнение $y = 2x - 2$ относительно x.

Функция $y = x^2$ не является обратимой, так как, например, значение $y = 1$ она принимает при $x = 1$ и при $x = -1$ (рис. 18).

Пусть $y = f(x)$ — обратимая функция. Тогда каждому y из множества значений функции соответствует одно определенное число x из области ее определения, такое, что $f(x) = y$. Это соответствие определяет функцию x от y, которую обозначим $x = g(y)$. В этой записи, в соответствии с принятыми обозначениями, поменяем местами x и y. Получим

$$y = g(x).$$

Функцию $y = g(x)$ называют *обратной* к функции $y = f(x)$.

Задача 1. Найти функцию, обратную к функции

$$y = 3x + 5. \qquad (1)$$

Δ Решая это уравнение относительно x, получаем

$$x = \frac{1}{3}(y - 5).$$

В этой формуле поменяем местами x и y

$$y = \frac{1}{3}(x - 5). \qquad (2)$$

Функция (2) является обратной к функции (1). $\blacktriangle$

Если обратимая функция $y = f(x)$ задана формулой, то для нахождения обратной функции надо решить уравнение $f(x) = y$ относительно x и затем поменять местами x и y.

Заметим, что рассмотренная в задаче функция $y = 3x + 5$ является обратной к найденной для нее обратной функции $y = \frac{1}{3}(x - 5)$. Поэтому эти функции называют *взаимно обратными*.

Из определения обратной функции следует, *что область определения обратной функции совпадает с множеством значений исходной, а множество значений обратной функции совпадает с областью определения исходной функции.*

Задача 2. Найти функцию, обратную к функции $y = \frac{1}{x-2}$.

Δ Решая это уравнение относительно x, получаем $x = 2 + \frac{1}{y}$. Заменив x на y и y на x, находим $y = 2 + \frac{1}{x}$. $\blacktriangle$

В этой задаче область определения функции $y = \frac{1}{x-2}$ есть множество действительных чисел, не равных 2, а множество ее значений — все действительные числа, не равные 0. График этой функции представлен на рисунке 19.

Для обратной функции $y = 2 + \frac{1}{x}$ область определения — множество действительных чисел, не равных 0, а множество значений — все действительные числа, не равные 2. График обратной функции изображен на рисунке 20.

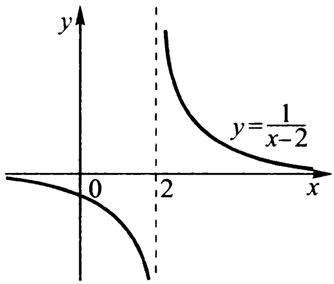


Рис. 19

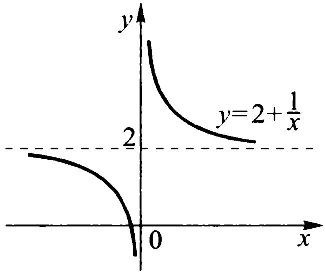


Рис. 20

Т е о р е м а 1. *Монотонная функция является обратимой.*

○ Пусть, например, функция $y = f(x)$ возрастает и пусть y_0 — ее значение в некоторой точке x_0, т.е. $y_0 = f(x_0)$. Тогда если x принадлежит области определения функции, то при $x > x_0$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0) = y_0$, а при $x < x_0$ — неравенство $f(x) < f(x_0) = y_0$. Следовательно, значение y_0 рассматриваемая функция принимает только в одной точке и поэтому является обратимой. ●

Например, функция $y = x^3$ возрастает, и поэтому она обратима, обратной к ней является функция $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 21, *а*).

Если функция $y = f(x)$ возрастает, то с увеличением x значения y возрастают и, наоборот, с увеличением y возрастает x. Это означает, что обратная функция также возрастает. Аналогично если функция $y = f(x)$ убывает, то обратная к ней функция также убывает.

Например, функция $f(x) = 1 - 2x$ убывает, и обратная к ней функция $g(x) = \frac{1-x}{2}$ также убывает. Функция, не являющаяся монотонной, может не иметь обратной.

Например, функция $y = x^2$, рассматриваемая на всей числовой оси, не имеет обратной. Однако если функцию $y = x^2$ рассматривать только при $x \geqslant 0$, то на этом промежутке она возрастает и, следовательно, имеет обратную $y = \sqrt{x}$ (рис. 21, *б*).

Функция $y = x^2$, рассматриваемая при $x \leqslant 0$, убывает и также имеет обратную $y = -\sqrt{x}$ (рис. 22).

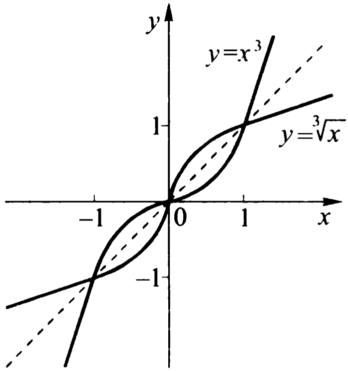


Рис. 21, *а*

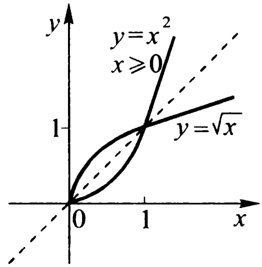


Рис. 21, *б*

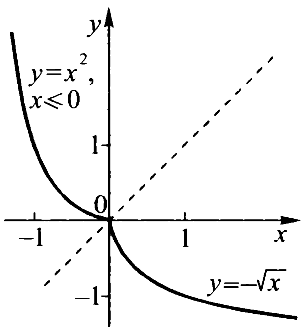


Рис. 22

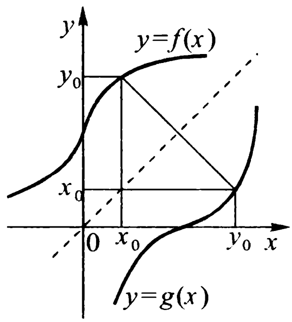


Рис. 23

Т е о р е м а 2. ***Если функция имеет обратную, то график обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой $y = x$.***

○ Если точка $(x_0;\ y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $(y_0;\ x_0)$ принадлежит графику обратной функции $y = g(x)$ (рис. 23), а точки $(x_0;\ y_0)$ и $(y_0;\ x_0)$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 24). ●

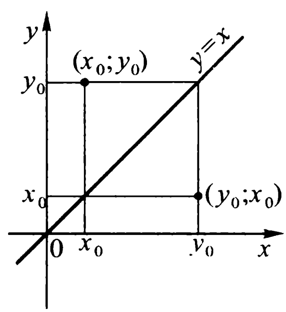


Рис. 24

Рисунки 21, *б*; 22 иллюстрируют эту теорему.

Отметим, что степенная функция $y = x^p$ с областью определения $x > 0$ и $p \neq 0$ обратима, так как по свойству 3 § 9 она монотонна. Обратной к ней является функция $y = x^{\frac{1}{p}}$.

Упражнения

209. (*Устно.*) Выяснить, является ли обратимой функция:

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = x^2 + 7$; 3) $y = \frac{1}{x}$;

4) $y = \sqrt{x}$; 5) $y = x^4$; 6) $y = x^4$, $x < 0$.

210. Найти функцию, обратную данной:

1) $y = 2x - 1$; 2) $y = -5x + 4$; 3) $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$;

4) $y = \frac{3x-1}{2}$; 5) $y = x^3 + 1$; 6) $y = x^3 - 3$.

211. Найти область определения и множество значений функции, обратной данной функции:

1) $y = -2x + 1$; 2) $y = \frac{1}{4}x - 7$; 3) $y = x^3 - 1$;

4) $y = (x - 1)^3$; 5) $y = \frac{2}{x}$; 6) $y = \frac{3}{x-4}$.

212. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком. Построить график функции, обратной данной (рис. 25).

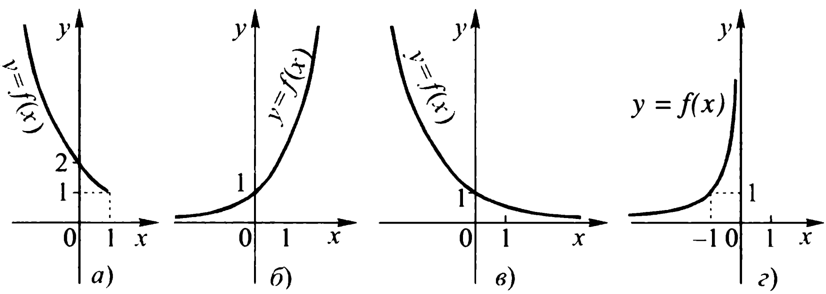


Рис. 25

---

213. Являются ли взаимно обратными функции:

1) $y = -x^3$ и $y = -\sqrt[3]{x}$; 3) $y = x^{-3}$ и $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

2) $y = -x^5$ и $y = \sqrt[5]{x}$; 4) $y = \sqrt[5]{x^3}$ и $y = \sqrt[3]{x^2}$?

214. Найти функцию, обратную данной:

1) $y = -x^{\frac{1}{2}}$; 2) $y = -x^{\frac{3}{5}}$; 3) $y = x^{\frac{3}{2}}$; 4) $y = -x^{\frac{1}{3}}$.

215. На одном рисунке построить график данной функции и функции, обратной данной:

1) $y = 3x - 1$;

2) $y = \frac{2x-1}{3}$;

3) $y = x^2 - 1$ при $x \geqslant 0$;

4) $y = (x-1)^2$ при $x \geqslant 1$;

5) $y = x^3 - 2$;

6) $y = (x-1)^3$;

7) $y = \sqrt{x} - 1$;

8) $y = \sqrt{x} + 1$.

§ 11. Равносильные уравнения и неравенства

1. Равносильные уравнения

Задача 1. Найти точки пересечения графиков функций $y = 3\sqrt{x}$ и $y = x + 2$.

Δ Если $(x; y)$ — точка пересечения данных графиков, то $y = 3\sqrt{x} = x + 2$. Следовательно, для нахождения абсцисс точек пересечения надо решить уравнение

$$3\sqrt{x} = x + 2. \qquad (1)$$

Возводя обе части уравнения (1) в квадрат, получаем $9x = x^2 + 4x + 4$, откуда $x^2 - 5x + 4 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Проверка показывает, что оба эти корня являются также и корнями уравнения (1).

Теперь находим ординаты точек пересечения данных графиков $y_1 = 3\sqrt{x_1} = 3$, $y_2 = 3\sqrt{x_2} = 6$. Итак, данные графики пересекаются в двух точках (1; 3) и (4; 6) (рис. 26).

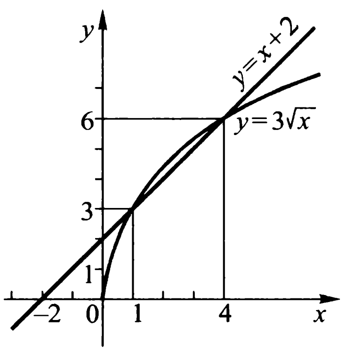


Рис. 26

Ответ. (1; 3); (4; 6). ▲

При преобразовании исходного уравнения

$$3\sqrt{x} = x + 2$$

получили

$$9x = x^2 + 4x + 4;$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Все три уравнения имеют одни и те же корни $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Такие уравнения называют *равносильными*.

*Уравнения, имеющие одно и то же множество корней, называются **равносильными**.*

Например, уравнения $4x - 3 = 2x + 3$ и $2x = 6$ равносильны, так как каждое из них имеет только один корень $x = 3$. Уравнения $(x - 2)(x + 5) = 0$ и $x^2 + 3x - 10 = 0$ также равносильны, так как они имеют одни и те же корни $x_1 = 2$, $x_2 = -5$.

Из определения равносильности уравнений следует, что *два уравнения равносильны, если каждый корень первого уравнения является корнем второго и, наоборот, каждый корень второго уравнения является корнем первого. Уравнения, не имеющие корней, также считают равносильными.*

Из курса 7 класса вы знаете, что можно сделать следующие преобразования уравнений:

любой член уравнения можно переносить из одной части в другую, изменив его знак на противоположный;

обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

При этих преобразованиях исходное уравнение заменяется на равносильное ему уравнение.

Заметим, что если некоторое выражение в левой или правой части уравнения заменить тождественно равным ему выражением, то получится уравнение, равносильное исходному. Однако не при любом преобразовании уравнение заменяется на равносильное.

Например, при возведении в квадрат обеих частей уравнения

$$\sqrt{x} = x - 2$$

получается уравнение

$$x = (x - 2)^2,$$

не равносильное исходному: первое уравнение имеет только один корень $x = 4$, а второе — два корня $x_1 = 4$, $x_2 = 1$.

В этом случае второе уравнение называют *следствием* первого уравнения.

Если при переходе от одного уравнения к другому не происходит потери корней, то второе уравнение называют *следствием* первого. Другими словами, *если все корни первого уравнения являются корнями второго, то второе уравнение называется следствием первого уравнения.*

Из этого определения и определения равносильности уравнения следует, что:

1) если два уравнения равносильны, то каждое из них является следствием другого;

2) если каждое из двух уравнений является следствием другого, то эти уравнения равносильны.

При решении уравнений главное не потерять корни, а наличие посторонних корней можно установить проверкой. Поэтому важно следить за тем, чтобы каждое уравнение, полученное при преобразовании данного уравнения, было его следствием.

З а д а ч а 2. Решить уравнение

$$\frac{2x}{x-2}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{4}{(x-1)(x-2)}. \qquad (2)$$

Δ Умножим обе части уравнения на общий знаменатель всех трех дробей, т.е. на $(x-1)(x-2)$. Получим

$$2x(x-1)-(x+1)(x-2)=4, \qquad (3)$$

откуда

$$x^2-x-2=0, \qquad x_1=2, \; x_2=-1.$$

П р о в е р к а. 1) При $x=2$ знаменатели двух дробей уравнения равны нулю. Поэтому $x=2$ не является корнем данного уравнения.

2) При $x=-1$ левая часть уравнения равна

$$\frac{2\cdot(-1)}{-1-2}-\frac{-1+1}{-1-1}=\frac{2}{3},$$

правая часть равна

$$\frac{4}{(-1-1)(-1-2)}=\frac{2}{3}.$$

О т в е т. $x=-1$. ▲

Заметим, что для проверки корня $x=-1$ достаточно увидеть, что знаменатели дробей уравнения при $x=-1$ не равны нулю (если, конечно, при решении уравнения не допущены ошибки в преобразованиях и вычислениях).

При решении этой задачи из равенства (2) получено уравнение (3), которое является следствием уравнения (2). Корень $x_1=2$ уравнения (3) не является корнем уравнения (2). Его называют *посторонним корнем* для уравнения (2).

Посторонние корни могут получиться при умножении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

З а д а ч а 3. Решить уравнение

$$x^2-4=7x-14.$$

Δ Преобразуем данное уравнение так:

$$(x+2)(x-2)=7(x-2), \qquad (4)$$

$$(x-2)(x+2-7)=0,$$

$$(x-5)(x-2)=0,$$

откуда $x_1=5$, $x_2=2$. ▲

Если обе части уравнения (4) разделить на $x - 2$, то получится уравнение $x + 2 = 7$, которое имеет только один корень $x = 5$, т.е. произойдет потеря корня $x = 2$ и решение задачи будет неверным.

Потеря корней может произойти при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

Итак, при решении уравнения можно делать только такие преобразования, при которых не происходит потери корней. Если при этом получаются уравнения-следствия данного, то необходима проверка найденных корней.

2. Равносильные неравенства

Аналогично определяется равносильность неравенств с неизвестным.

Неравенства, имеющие одно и то же множество решений, называют равносильными.

Например, неравенства $\frac{x-3}{x^2+1} < 0$ и $x - 3 < 0$ равносильны, неравенства $x^2 - 4x < x - 6$ и $x^2 - 5x + 6 < 0$ также равносильны.

При решении неравенств обычно данное неравенство преобразуется в равносильное ему.

Задача 4. Решить неравенство

$$\frac{5x-3}{x^2+1} > 1.$$

Δ Так как $x^2 + 1 > 0$ при всех действительных значениях x, то, умножая данное неравенство на $x^2 + 1$, получаем неравенство

$$5x - 3 > x^2 + 1,$$

равносильное данному.

Решая это неравенство, получаем

$$x^2 - 5x + 4 < 0,$$

$$(x - 1)(x - 4) < 0,$$

откуда $1 < x < 4$. $\blacktriangle$

Задача 5*. Решить уравнение

$$(3x-4)^{2x^2+2} = (3x - 4)^{5x}.$$

Δ 1) $3x - 4 > 0$, но $3x - 4 \neq 1$, т.е. $x > \frac{4}{3}$, но $x \neq \frac{5}{3}$, тогда $2x^2 + 2 = 5x$,

$2x^2 - 5x + 2 = 0$, $x = 2$ или $x = \frac{1}{2}$, $2 > \frac{4}{3}$, $\frac{1}{2} < \frac{4}{3}$, $x_1 = 2$.

2) $3x - 4 = 1$, т.е. $x_2 = \frac{5}{3}$, так как $1^y = 1$ при любом y.

3) $3x-4=0$, т.е. $x=\frac{4}{3}$. Выполним проверку: $0^{2\cdot\frac{16}{9}+2}=0$, $0^{\frac{20}{3}}=0$, $x_3=\frac{4}{3}$ — корень уравнения.

4) $3x-4<0$, но $3x-4\neq-1$, т.е. $x<\frac{4}{3}$, но $x\neq1$, тогда $2x^2+2=5x$, $x=\frac{1}{2}$ или $x=2$; $\frac{1}{2}<\frac{4}{3}$. Выполним проверку: $\left(-\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\neq\left(-\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$, так как $\left(-\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$ не существует.

5) $3x-4=-1$, т.е. $x=1$. Выполним проверку: $(-1)^{2\cdot1+2}=(-1)^4>0$, $(-1)^5<0$, $x=1$ — не корень.

Ответ. $x_1=2$, $x_2=\frac{5}{3}$, $x_3=\frac{4}{3}$. ▲

Упражнения

216. Решить уравнение:

1) $(x+7)\cdot3=2x+14$;

2) $x^2+\frac{1}{x^2-4}=4+\frac{1}{x^2-4}$;

3) $\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{1-2x}{x^2-4}$;

4) $\frac{5x-15}{(x-3)(x+2)}=\frac{2}{x+2}$.

217. Выяснить, равносильны ли уравнения:

1) $2x-7=4x+5$ и $2x+12=0$;

2) $\frac{1}{5}(2x-1)=1$ и $\frac{3x-1}{8}=1$;

3) $x^2-3x+2=0$ и $x^2+3x+2=0$;

4) $(x-2)^2=3(x-2)$ и $x-2=3$;

5) $x^2+1=0$ и $2^{x-1}=0$;

6) $|x-2|=-3$ и $3^x=(-1)^3$.

218. Выяснить, равносильны ли неравенства:

1) $2x-1\geqslant2$ и $2(x-1)\geqslant1$;

2) $(x-1)(x+2)<0$ и $x^2+x<2$;

3) $(x-2)(x+1)<3x+3$ и $x-2<3$;

4) $x(x+3)\geqslant2x$ и $x^2(x+3)\geqslant2x^2$.

219. Установить, какое из двух данных уравнений является следствием другого уравнения:

1) $x-3=0$ и $x^2-5x+6=0$; 2) $\frac{x^2-3x+2}{x-1}=0$ и $x^2-3x+2=0$.

220. Решить уравнение:

1) $\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{x-1}=\frac{4x}{x^2-1}$;

2) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{2}{x}=\frac{1}{x-2}$;

3) $(x-3)(x-5)=3(x-5)$;

4) $(x-2)(x^2+1)=2(x^2+1)$.

221. Решить неравенство:

1) $\frac{x+3}{2+x^2}<3$; 2) $\frac{x-2}{5-x}>1$.

Выяснить, равносильны ли уравнения (**222—224**).

222. 1) $|2x-1|=3$ и $2x-1=3$;

2) $\frac{3x-2}{3}-\frac{4-x}{2}-\frac{3x-5}{6}=2x-2$ и $2x+3=\frac{10}{3}$.

223. 1) $\frac{1}{x}=0$ и $x^2+1=0$;

2) $\sqrt{x}=-2$ и $x+3=x$;

3) $x^2=2x$ и $x=2$;

4) $3^{2x^2-5x}=\frac{1}{9}$ и $2x^2-5x=-2$.

224. 1) $2x-1=4-1{,}5x$ и $3{,}5x-5=0$;

2) $x(x-1)=2x+5$ и $x^2-3x-5=0$;

3) $2^{3x+1}=2^{-3}$ и $3x+1=3$;

4) $\sqrt{x+2}=3$ и $x+2=9$.

225. Установить, какое из двух данных уравнений является следствием другого уравнения:

1) $|x|=5$ и $\sqrt{x^2}=5$;

2) $\frac{x^2}{x+2}=\frac{4}{x+2}$ и $x^2=4$;

3) $(x-5)(x+3)^2=2(x+3)^2$ и $x-5=2$;

4) $\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-3}{x+2}$ и $(x-2)(x+2)=(x-3)(x+3)$.

226. Решить уравнение $\frac{1}{3x+1}-\frac{2}{3x-1}-\frac{5x}{9x^2-1}=\frac{3x^2}{1-9x^2}$.

227. Найти корни уравнения:

1) $\frac{3}{x-1}-\frac{4x-1}{x+1}=\frac{x^2+5}{x^2-1}-5$;

2) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x(x-4)}{x^2-4}=\frac{x-2}{x+2}-\frac{4(3+x)}{4-x^2}$.

228. Решить неравенство:

1) $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 > 2x^3 - x^2 + 4x - 2$;

2) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 > -3x^3 + x^2 + 12x - 4$.

229*. Решить уравнение:

1) $(x-3)^{x^2-x-2} = 1$;

2) $(x^2-x-1)^{x^2-1} = 1$;

3) $(x+3)^{x^2-4} = (x+3)^{-3x}$;

4) $(x+3)^{x^2-3} = (x+3)^{2x}$.

§ 12. Иррациональные уравнения

В уравнениях $\sqrt{x+1} = x - 1$, $\sqrt{5x-4} = 2 + \sqrt{x}$ неизвестное x находится под знаком корня. Такие уравнения называются *иррациональными*.

Приведем еще примеры иррациональных уравнений:

$$\sqrt[4]{x+15} = x + 1, \qquad \sqrt[3]{x+6} = \sqrt{6-x}.$$

Иррациональные уравнения часто получаются при решении разных задач. Их решение основано на следующем свойстве.

При возведении обеих частей уравнения в натуральную степень получается уравнение-следствие данного.

○ Пусть x — корень уравнения

$$f(x) = g(x),$$

т.е. $f(x) = g(x)$ — верное числовое равенство. Тогда по свойствам верных числовых равенств $f^n(x) = g^n(x)$ — также верное числовое равенство, т.е. x — корень уравнения

$$f^n(x) = g^n(x). \quad \bullet$$

Обратное утверждение неверно.

Например, уравнение $\sqrt{6-x} = x$ имеет один корень $x = 2$, а уравнение $6 - x = x^2$ имеет два корня $x_1 = 2$, $x_2 = -3$.

При возведении обеих частей иррационального уравнения в натуральную степень могут появиться посторонние корни, поэтому необходима проверка.

Например, при возведении обеих частей уравнения

$$\sqrt{x^2+x-1} = \sqrt{x}$$

в квадрат получим уравнение

$$x^2 + x - 1 = x, \qquad \text{т.е. } x^2 = 1.$$

Это уравнение имеет два корня $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Второй корень является посторонним для исходного уравнения, так как подкоренные выражения при $x = -1$ отрицательны.

З а д а ч а 1. Решить уравнение

$$\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-5}.$$

Δ Возводя обе части уравнения в квадрат, получаем

$$x+6-2\sqrt{(x+6)(x+1)}+x+1=2x-5,$$

откуда $\sqrt{(x+6)(x+1)}=6$.

Возведем обе части последнего уравнения в квадрат

$$x^2+7x+6=36, \text{ или } x^2+7x-30=0.$$

Корни этого уравнения $x_1=3$, $x_2=-10$.

Проверка показывает, что $x_2=-10$ — посторонний корень.

О т в е т. $x=3$. ▲

З а д а ч а 2. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x^2+12}=x. \qquad (1)$$

Δ Возведем обе части уравнения в четвертую степень

$$x^2+12=x^4,$$

откуда $x^4-x^2-12=0$.

Решим это биквадратное уравнение

$$x^2=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{1\pm 7}{2},$$

т.е. $x^2=4$ или $x^2=-3$.

Уравнение $x^2=4$ имеет два корня: $x=\pm 2$. Уравнение $x^2=-3$ не имеет действительных корней.

Так как при возведении обеих частей уравнения (1) в четвертую степень могли появиться посторонние корни, то нужно сделать проверку. При $x=2$ обе части уравнения (1) равны 2, т.е. $x=2$ — корень уравнения (1).

При $x=-2$ левая часть уравнения (1) равна 2, а правая равна -2, т.е. $x=-2$ не является корнем уравнения (1).

О т в е т. $x=2$. ▲

З а д а ч а 3. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x^3-19}=x-1. \qquad (2)$$

Δ Возводя обе части уравнения в куб, получаем

$$x^3-19=(x-1)^3,$$

откуда

$$x^3-19=(x^2-2x+1)(x-1),$$

$$x^3-19=x^3-3x^2+3x-1, \quad 3x^2-3x-18=0, \quad x^2-x-6=0.$$

Корни этого уравнения: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Проверка показывает, что оба эти значения неизвестного являются корнями уравнения (2).

Ответ. $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. ▲

Иногда при решении иррационального уравнения полезно использовать графики функций.

Задача 4. Выяснить с помощью графиков, сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x} = 1 - x^2$. Найти приближенные значения этих корней.

Δ Построим на одном рисунке графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 1 - x^2$ (рис. 27). Графики пересекаются в одной точке при $x \approx 0{,}5$.

Ответ. $x \approx 0{,}5$. ▲

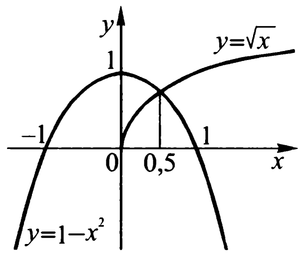


Рис. 27

Задача 5*. Решить относительно x уравнение

$$\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-3} = a. \tag{3}$$

Δ Возводя обе части уравнения в квадрат, получаем

$$(x+2)(x-3) = a^2,$$

откуда

$$x^2 - x - 6 - a^2 = 0,$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{25 + 4a^2}\right), \qquad x_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{25 + 4a^2}\right). \tag{4}$$

Для проверки отметим, что $25 + 4a^2 \geqslant 25$ и $\sqrt{25 + 4a^2} \geqslant 5$ при любых действительных значениях a. Из формул (4) получим $x_1 \geqslant 3$, $x_2 \leqslant -2$.

При $x = x_1$ оба подкоренных выражения в уравнении (3) неотрицательны, а при $x = x_2$ подкоренное выражение второго корня отрицательно: $x_2 - 3 \leqslant -5 < 0$. Следовательно, x_2 — посторонний корень.

Для окончательной проверки корня x_1 достаточно заметить, что при $x = x_1$ левая часть уравнения (3) неотрицательна, следовательно, правая часть также должна быть неотрицательной, т.е. должно выполняться неравенство $a \geqslant 0$.

Ответ. Если $a \geqslant 0$, то $x = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{25 + 4a^2}\right)$; если $a < 0$, то корней нет. ▲

Упражнения

230. (*Устно.*) Решить уравнение:

1) $\sqrt{x}=2$; 2) $\sqrt{x}=7$; 3) $\sqrt[3]{x}=2$; 4) $\sqrt[3]{x}=-3$;

5) $\sqrt{2x-1}=0$; 6) $\sqrt[3]{1-3x}=0$; 7) $\sqrt[4]{x}=1$; 8) $\sqrt[4]{2-x}=0$.

Решить уравнение (231–240).

231. 1) $\sqrt{x+1}=3$; 3) $\sqrt{x+2}=\sqrt{3-x}$;

2) $\sqrt{x-2}=5$; 4) $\sqrt{4+x}=\sqrt{2x-1}$.

232. 1) $\sqrt[3]{2x+3}=1$; 3) $\sqrt[4]{1-2x}=\sqrt[4]{x}$;

2) $\sqrt[3]{1-x}=2$; 4) $\sqrt[3]{3x^2-3}=\sqrt[3]{8x}$.

233. 1) $x+1=\sqrt{1-x}$; 2) $x=1+\sqrt{x+11}$; 3) $\sqrt{x+3}=\sqrt{5-x}$;

4) $\sqrt{x+4}=\sqrt{2x-1}$; 5) $\sqrt{x^2-23}=11$; 6) $\sqrt{x^2-x-3}=3$.

234. 1) $\sqrt{x}-x=-12$; 2) $x+\sqrt{x}=2(x-1)$; 3) $\sqrt{x^2-20}=\sqrt{8x}$;

4) $\sqrt{x-1}=x-3$; 5) $\sqrt{x^2-5}=\sqrt{1-x}$; 6) $\sqrt{6+x-x^2}=1-x$.

235. 1) $x+3=\sqrt{33+x^2}$; 4) $\sqrt{5x}+\sqrt{14-x}=8$;

2) $\sqrt{x^2-36{,}75}=x-3{,}5$; 5) $\sqrt{15+x}+\sqrt{3+x}=6$;

3) $\sqrt{2x-34}=1+\sqrt{x}$; 6) $\sqrt{3-2x}-\sqrt{1-x}=1$.

---

236. 1) $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^3+x^2}=0$; 3) $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=\sqrt{5-x}$;

2) $\sqrt{x-2}=\sqrt{1-x}$; 4) $\sqrt[3]{1+x^4}+\sqrt[3]{1+x^2}=0$.

237. 1) $\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}=2$; 4) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=9$;

2) $\sqrt{12+x}-\sqrt{1-x}=1$; 5) $\sqrt{x+17}-\sqrt{x-7}=4$;

3) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}=4$; 6) $\sqrt{2x-15}-\sqrt{x+16}=-1$.

238. 1) $\sqrt{5x-3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}$;

2) $\sqrt{1-2x}-\sqrt{13+x}=\sqrt{x+4}$;

3) $\sqrt{x-10}+\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+11}$;

4) $\sqrt{7x+1}-\sqrt{6-x}=\sqrt{15+2x}$.

239. 1) $\sqrt[3]{x-2}=2$; 3) $\sqrt[4]{25x^2-144}=x$;

2) $\sqrt[3]{2x+7}=\sqrt[3]{3(x-1)}$; 4) $x^2=\sqrt{19x^2-34}$.

240. 1) $\sqrt[3]{x^3-2}=x-2$; 2) $\sqrt[3]{x^3-5x^2+16x-5}=x-2$.

241. Выяснить с помощью графиков, сколько корней имеет уравнение, и найти приближенные значения этих корней:

1) $\sqrt{x}-6=-x^2$; 3) $\sqrt{x+1}=x^2-7$;

2) $\sqrt[3]{x}=(x-1)^2$; 4) $x^3-1=\sqrt{x-1}$.

242*. Решить уравнение:

1) $\sqrt{4x+2\sqrt{3x^2+4}}=x+2$; 3) $\sqrt{x^2+3x+12}-\sqrt{x^2+3x}=2$;

2) $3-x=\sqrt{9-\sqrt{36x^2-5x^4}}$; 4) $\sqrt{x^2+5x+10}-\sqrt{x^2+5x+3}=1$.

243*. Решить относительно x следующее уравнение:

1) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-2}=a$; 2) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+2}=a-1$.

§ 13. Иррациональные неравенства

З а д а ч а 1. Стрельба из спортивного пистолета по круглой мишени диаметром 1 м ведется из точки прямой, перпендикулярной плоскости мишени и проходящей через ее центр. На каком расстоянии от мишени должна быть точка выстрела, чтобы разность расстояний от нее до края мишени и до центра была не больше 2 см?

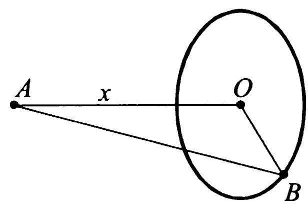


Рис. 28, *а*

Δ Пусть A — точка выстрела, O — центр мишени, B — точка на окружности мишени (рис. 28, *а*). По условию $BO=50$ см. Обозначим $AO=x$, тогда $AB=\sqrt{x^2+2500}$. По условию $AB-AO\leqslant 2$, т.е.

$$\sqrt{x^2+2500}-x\leqslant 2,$$

или

$$\sqrt{x^2+2500}\leqslant x+2. \qquad (1)$$

Так как по смыслу задачи $x>0$, то левая и правая части неравенства (1) положительны. Следовательно, обе части неравенства (1) можно возвести в квадрат, при этом знак неравенства не изменится и получится равносильное неравенство

$$x^2+2500\leqslant x^2+4x+4,$$

откуда $4x\geqslant 2496$, $x\geqslant 624$ см.

О т в е т. Не меньше 6,24 м. ▲

В этой задаче пришлось решать неравенство (1), содержащее неизвестное под знаком корня. Такие неравенства называют *иррациональными*.

Рассмотрим примеры решений иррациональных неравенств.

Задача 2. Решить неравенство

$$\sqrt{5-x}<4. \qquad (2)$$

Δ Найдем область определения неравенства (2), т.е. множество таких значений x, при которых имеют смысл обе части неравенства. Правая часть неравенства определена при всех значениях x, а левая — при $5 - x \geqslant 0$, т.е. при $x \leqslant 5$. Следовательно, область определения неравенства (2) — луч $x \leqslant 5$.

При $x \leqslant 5$ обе части неравенства (2) неотрицательны, и поэтому при возведении в квадрат обеих их частей получается равносильное (на множестве $x \leqslant 5$) неравенство $5 - x < 16$.

Таким образом, неравенство (2) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x \leqslant 5, \\ 5-x<16. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $-11 < x \leqslant 5$.

Ответ. $-11 < x \leqslant 5$. ▲

Рассуждения, приведенные при решении задачи 2, можно провести устно и сразу записать, что неравенство (2) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 5-x \geqslant 0, \\ 5-x<16. \end{cases}$$

Задача 3. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-3x}<2. \qquad (3)$$

Δ Неравенство (3) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-3x \geqslant 0, \\ x^2-3x<4. \end{cases} \qquad (4)$$

Решая первое неравенство системы (4), получаем $x \leqslant 0$, $x \geqslant 3$. Решая второе неравенство системы (4), получаем $-1 < x < 4$. Оба неравенства системы (4) выполняются при $-1 < x \leqslant 0$, а также при $3 \leqslant x < 4$ (рис. 28, *б*).

Ответ. $-1 < x \leqslant 0$, $3 \leqslant x < 4$. ▲

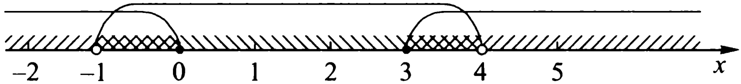


Рис. 28, *б*

З а д а ч а 4. Решить неравенство

$$\sqrt{10+x-x^2} \geqslant 2. \qquad (5)$$

Δ Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 10+x-x^2 \geqslant 0, \\ 10+x-x^2 \geqslant 4. \end{cases} \qquad (6)$$

Так как каждое решение второго неравенства системы (6) является решением первого неравенства системы (6), то эта система равносильна одному второму неравенству

$$10+x-x^2 \geqslant 4. \qquad (7)$$

Следовательно, неравенство (5) равносильно неравенству (7). Решая неравенство (7), получаем $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

О т в е т. $-2 \leqslant x \leqslant 3$. ▲

З а д а ч а 5. Решить неравенство:

1) $\sqrt{3x-4} < -5$; 2) $\sqrt{2x^2+5x-3} \leqslant 0$.

Δ 1) При всех допустимых значениях x, т.е. при $x \geqslant \frac{4}{3}$ значения $\sqrt{3x-4}$ неотрицательны. Поэтому неравенство $\sqrt{3x-4} < -5$ решений не имеет.

2) Неравенство $\sqrt{2x^2+5x-3} \leqslant 0$ выполняется только тогда, когда $\sqrt{2x^2+5x-3} = 0$, т.е. если $2x^2+5x-3=0$, откуда $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$. ▲

З а д а ч а 6. Решить неравенство

$$\sqrt{3x+1} \leqslant x+1. \qquad (8)$$

Δ Область определения этого неравенства — луч $x \geqslant -\frac{1}{3}$. При этих значениях x правая часть неравенства (8) положительна. Следовательно, неравенство (8) равносильно системе

$$\begin{cases} 3x+1 \geqslant 0, \\ 3x+1 \leqslant (x+1)^2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 0$, $x \geqslant 1$.

О т в е т. $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 0$, $x \geqslant 1$. ▲

Задача 7. Решить неравенство

$$\sqrt{x+3} > x+1. \qquad (9)$$

Δ Область определения этого неравенства — луч $x \geqslant -3$. При всех $x \geqslant -3$ левая часть неравенства неотрицательна, правая же часть этого неравенства отрицательна при $x < -1$. Поэтому все значения x из промежутка $-3 \leqslant x < -1$ являются решениями неравенства (9).

Рассмотрим случай, когда $x \geqslant -1$. Тогда обе части неравенства (9) неотрицательны, и поэтому обе части этого неравенства можно возводить в квадрат: $x + 3 > (x + 1)^2$. Решениями этого неравенства являются значения x из промежутка $-2 < x < 1$. Отсюда, учитывая, что $x \geqslant -1$, получаем $-1 \leqslant x < 1$.

Итак, решениями неравенства (9) являются все значения x из промежутка $-3 \leqslant x < 1$, а также из промежутка $-1 \leqslant x < 1$, т.е. из промежутка $-3 \leqslant x < 1$.

Ответ. $-3 \leqslant x < 1$. ▲

Неравенство (9) проще решать с помощью графиков. На рисунке 29, *а* построены графики функций $y = \sqrt{x+3}$ и $y = x + 1$. Из этого рисунка видно, что решениями неравенства (9) являются значения x из промежутка $-3 \leqslant x < 1$.

Задача 8. С помощью графиков решить неравенство

$$\sqrt{x} < 2 - x.$$

Δ На одном рисунке построим графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 2 - x$ (рис. 29, *б*) и выясним, при каких значениях x точки графика функции $y = \sqrt{x}$ лежат ниже точек графика функции $y = 2 - x$.

Из рисунка видно, что эти графики пересекаются в одной точке, абсцисса которой является корнем уравнения $\sqrt{x} = 2 - x$. Этот корень $x = 1$.

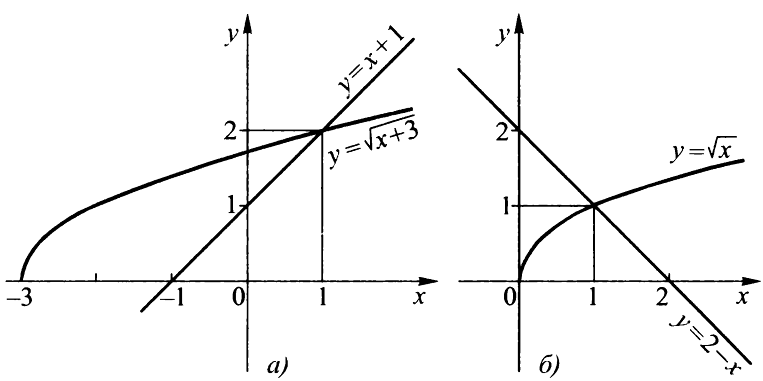


Рис. 29

График функции $y = \sqrt{x}$ лежит ниже графика функции $y = 2 - x$ при $0 \leqslant x < 1$.

О т в е т. $0 \leqslant x < 1$. ▲

З а д а ч а 9. Решить неравенство

$$\sqrt{2x^2 - 5x - 3} > x - 1. \qquad (10)$$

Δ Найдем область определения этого неравенства, т.е. решим неравенство $2x^2 - 5x - 3 \geqslant 0$. Так как корнями уравнения $2x^2 - 5x - 3 = 0$ являются числа $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$, то неравенство $2x^2 - 5x - 3 \geqslant 0$ выполняется при $x \leqslant -\frac{1}{2}$ и при $x \geqslant 3$ (рис. 30).

Таким образом, для решения неравенства надо выбирать только такие значения x, которые принадлежат его области определения.

1) Если $x - 1 < 0$, т.е. $x < 1$, то из этого промежутка области определения неравенства (10) удовлетворяют только числа $x \leqslant -\frac{1}{2}$ (рис. 31).

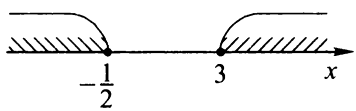


Рис. 30

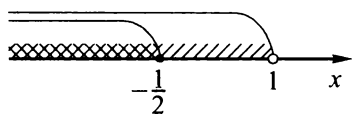


Рис. 31

2) Если $x - 1 \geqslant 0$, т.е. $x \geqslant 1$, то, возводя обе части неравенства (10) в квадрат, получаем

$$2x^2 - 5x - 3 > x^2 - 2x + 1,$$

откуда

$$x^2 - 3x - 4 > 0.$$

Так как корнями уравнения $x^2 - 3x - 4 = 0$ являются числа $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, то неравенство $x^2 - 3x - 4 > 0$ выполняется при $x_1 < -1$, $x_2 > 4$. Из этих двух промежутков области определения неравенства и условию $x \geqslant 1$ удовлетворяют только числа $x \geqslant 4$ (рис. 32).

О т в е т. $x \leqslant -\frac{1}{2}$, $x > 4$. ▲

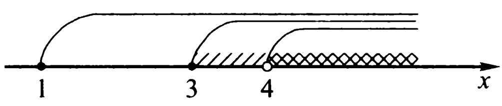


Рис. 32

Задача 10*. Решить относительно x неравенство

$$\sqrt{2ax-x^2} \geqslant a-x, \qquad (11)$$

если $a > 0$.

Δ Найдем область определения этого неравенства, т.е. решим неравенство $2ax - x^2 \geqslant 0$. Так как корнями уравнения $2ax - x^2 = 0$ являются числа $x_1 = 0$, $x_2 = 2a$ и $a > 0$, то областью определения неравенства (11) является промежуток $0 \leqslant x \leqslant 2a$.

1) Если $a - x < 0$, т.е. $x > a$, то из этого промежутка области определения неравенства (11) удовлетворяют только числа $a < x \leqslant 2a$.

2) Если $a - x \geqslant 0$, т.е. $x \leqslant a$, то, возводя обе части неравенства (11) в квадрат, получаем

$$2ax - x^2 \geqslant (a-x)^2,$$

откуда

$$2ax - x^2 \geqslant a^2 - 2ax + x^2,$$

$$2x^2 - 4ax + a^2 \leqslant 0.$$

Так как корнями уравнения $2x^2 - 4ax + a^2 = 0$ являются числа $x_1 = \frac{a}{2}(2-\sqrt{2})$, $x_2 = \frac{a}{2}(2+\sqrt{2})$ и $a > 0$, то неравенство $2x^2 - 4ax + a^2 \leqslant 0$ выполняется при $\frac{a}{2}(2-\sqrt{2}) \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}(2+\sqrt{2})$. Из этих значений надо выбрать те, которые принадлежат области определения, т.е. промежутку $0 \leqslant x \leqslant 2a$ и удовлетворяют условию $x \leqslant a$, т.е. из промежутка $0 \leqslant x \leqslant a$ (рис. 33).

Так как $0 < \frac{2-\sqrt{2}}{2} < 1$, $\frac{2+\sqrt{2}}{2} > 1$, то из рисунка 33 видно, что в этом случае решениями неравенства (11) являются числа $\frac{a}{2}(2-\sqrt{2}) \leqslant x \leqslant a.$

Объединяя оба случая, получаем

$$\frac{a}{2}(2-\sqrt{2}) \leqslant x \leqslant 2a. \ \blacktriangle$$

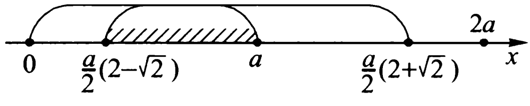


Рис. 33

Упражнения

244. Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} 2x-1>0, \\ x+1>0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-1\geqslant 0, \\ x>2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3-x\leqslant 2, \\ 2x+1\leqslant 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 9-x^2\leqslant 0, \\ x+5<0. \end{cases}$

Решить неравенство (**245—250**).

245. 1) $\sqrt{x}>2$; 2) $\sqrt{x}<3$; 3) $\sqrt[3]{x}\geqslant 1$;

4) $\sqrt[3]{2x}<3$; 5) $\sqrt{3x}>1$; 6) $\sqrt{2x}\leqslant 2$.

246. 1) $\sqrt{x-2}>3$; 2) $\sqrt{x-2}<1$; 3) $\sqrt{3-x}<5$;

4) $\sqrt{4-x}>3$; 5) $\sqrt{2x-3}>4$; 6) $\sqrt{x+1}\geqslant \frac{2}{3}$;

7) $\sqrt{3x-5}<5$; 8) $\sqrt{4x+5}\leqslant \frac{1}{2}$.

247. 1) $\sqrt{x^2-1}>1$; 2) $\sqrt{1-x^2}<1$; 3) $\sqrt{25-x^2}>4$;

4) $\sqrt{25-x^2}<4$; 5) $\sqrt{x^2-8x}>3$; 6) $\sqrt{3x^2-26x-1}>2\sqrt{2}$;

7) $\sqrt{1-x+x^2}>-\frac{1}{3}$; 8) $\sqrt{x^2-3x-4}<-2$.

---

248. 1) $\sqrt{2x^2+3x-2}>0$; 5) $\sqrt{x^2+2x}>-3-x^2$;

2) $\sqrt{2+x-x^2}>-1$; 6) $\sqrt{4x-x^2}>-2-3x^2$;

3) $\sqrt{6x-x^2}<\sqrt{5}$; 7) $\sqrt{x^2-3x+2}\leqslant -1-2x^2$;

4) $\sqrt{x^2-x}>\sqrt{2}$; 8) $\sqrt{x^2-x-2}>-1-x^2$.

249. 1) $\sqrt{x+2}>\sqrt{4-x}$; 5) $\sqrt{5x+11}>x+3$;

2) $\sqrt{3+2x}\geqslant \sqrt{x+1}$; 6) $\sqrt{x+3}>x+1$;

3) $\sqrt{2x-5}<\sqrt{5x+4}$; 7) $\sqrt{2x-7}\leqslant \sqrt{6x+13}$;

4) $\sqrt{3x-2}>x-2$; 8) $\sqrt{3-x}<\sqrt{3x-5}$.

250*. 1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\sqrt{x-1}$; 2) $\sqrt{x+3}<\sqrt{7-x}+\sqrt{10-x}$.

Решить неравенство, используя графики функций (251—252).

251. 1) $\sqrt{x} \geqslant x$; 2) $\sqrt{x} < x$; 3) $\sqrt{x} > x-2$; 4) $\sqrt{x} \leqslant x-2$.

252. 1) $\sqrt{x} \leqslant 2x$; 2) $\sqrt{x} > 0{,}5x$; 3) $\sqrt{x} \geqslant 2x-1$; 4) $\sqrt{x} \geqslant x^2$.

253*. Решить неравенство:

1) $\sqrt{x-1} \leqslant a$; 2) $\sqrt{2ax-x^2} \geqslant a-x$, если $a \leqslant 0$.

Упражнения к главе III

254. Изобразить схематически график функции, указать ее область определения и множество значений:

1) $y = x^7$; 2) $y = 7^x$; 3) $y = x^{\frac{1}{2}}$;

4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; 5) $y = x^{-2}$; 6) $y = x^{-3}$.

255. На одном рисунке построить графики функций $y = x^2$ и $y = 2^x$.

Сравнить значения этих функций при $x = 0$; $0{,}5$; 1; $\frac{3}{2}$; 2; 3; 4; 5.

256. Расположить числа в порядке возрастания:

1) $0{,}3^{\pi}$; $0{,}3^{0{,}5}$; $0{,}3^{\frac{2}{3}}$; $0{,}3^{3{,}1415}$;

2) $\sqrt{2}^{\,\pi}$; $1{,}9^{\pi}$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\pi}$; π^{π};

3) 5^{-2}; $5^{-0{,}7}$; $5^{\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{2{,}1}$;

4) $0{,}5^{-\frac{2}{3}}$; $1{,}3^{-\frac{2}{3}}$; $\pi^{-\frac{2}{3}}$; $\sqrt{2}^{\,-\frac{2}{3}}$.

257. Решить уравнение с помощью графиков:

1) $\sqrt[3]{x} = 3^{x-1}$; 2) $x^{-2} = \sqrt[5]{-x}$.

258. Найти область определения функции:

1) $y = \sqrt[3]{1-x}$; 3) $y = (3x^2+1)^{-2}$;

2) $y = \left(2-x^2\right)^{\frac{3}{5}}$; 4) $y = 3^{\sqrt{x^2-x-2}}$.

259. Найти функцию, обратную данной, ее область определения и множество значений:

1) $y = 0{,}5x + 3$; 2) $y = \dfrac{2}{x-3}$; 3) $y = (x+2)^3$; 4) $y = x^3 - 1$.

260. Изобразить график функции, обратной к функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 34, *а* и *б*.

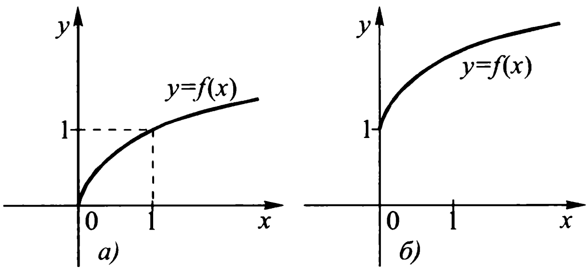


Рис. 34

261. Выяснить, являются ли равносильными уравнения:

1) $2^{x^2+3x} = 2^2$ и $x^2 + 3x = 2$;

2) $\sqrt{x^2+3x} = \sqrt{2}$ и $x^2 + 3x = 2$;

3) $\sqrt[4]{x-2} = \sqrt[4]{3-x}$ и $x - 2 = 3 - x$;

4) $\sqrt[3]{x+18} = \sqrt[3]{2-x}$ и $x + 18 = 2 - x$.

262. Решить уравнение:

1) $\sqrt{3-x} = 2$;

2) $\sqrt{3x+1} = 8$;

3) $\sqrt{3-4x} = 2x$;

4) $\sqrt{5x-1+3x^2} = 3x$;

5) $\sqrt{2x-1} = x-2$;

6) $\sqrt{2-2x} = x+3$;

7) $\sqrt[3]{x^2-17} = 2$;

8) $\sqrt[4]{x^2+17} = 3$.

263. Решить неравенство:

1) $\sqrt{x-1} > 1$;

2) $\sqrt{1-x} < 3$;

3) $\sqrt{2-x} \leqslant x$;

4) $\sqrt{3+x} \geqslant 2x$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найти область определения функции:

1) $y = 3(x-1)^{-3}$; 2) $y = \sqrt[4]{x^2-3x-4}$.

2. Построить график функции:

1) $y = \sqrt[3]{x+1}$; 2) $y = 2x^{-2}$; 3) $y = \frac{x^4}{2}$.

Для каждой функции указать область определения и значения x, при которых $y > 0$.

3. Решить уравнение:

1) $\sqrt[3]{x-3} = 5$; 2) $\sqrt{3-x-x^2} = x$.

4. Решить неравенство:

1) $\sqrt{2x+1} < 1$; 2) $\sqrt{4x^2-1} < x$.

---

264. На одном рисунке изобразить схематически графики функций:

1) $y = \sqrt{x^5}$, $y = x\sqrt{x}$, $y = x^{1,1}$;

2) $y = \sqrt[5]{x}$, $y = x^{0,7}$, $y = x^{0,1}$;

3) $y = x^{-1,5}$, $y = x^{-1,2}$, $y = x^{-2,1}$;

4) $y = x^{\sqrt{2}}$, $y = x^{\pi}$, $y = x^{\sqrt{5}}$.

265. Являются ли заданные функции взаимно обратными:

1) $y = \frac{10-3x}{x-4}$ и $y = \frac{4x+10}{x+3}$;

2) $y = \frac{3x-6}{3x-1}$ и $y = \frac{6-x}{3-3x}$;

3) $y = 5(1-x)^{-1}$ и $y = (5-x)\cdot x^{-1}$;

4) $y = \frac{2-x}{2+x}$ и $y = \frac{2(x-1)}{1+x}$?

266. Найти функцию, обратную данной, ее область определения и множество значений:

1) $y = 2 + \sqrt{x+2}$; 3) $y = \sqrt{3-x} - 1$;

2) $y = 2 - \sqrt{x+4}$; 4) $y = \sqrt{1-x} + 3$.

Решить уравнение (267—268).

267. 1) $\sqrt{x-4} = \sqrt{x-3} - \sqrt{2x-1}$; 3) $\sqrt{x-3} = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+4}$;

2) $2\sqrt{x+3} - \sqrt{2x+7} = \sqrt{x}$; 4) $\sqrt{9-2x} = 2\sqrt{4-x} - \sqrt{1-x}$.

268*. 1) $\sqrt{x+4}-3\sqrt[4]{x+4}+2=0$;

2) $\sqrt{x-3}=3\sqrt[4]{x-3}+4$;

3) $\sqrt[6]{1-x}-5\sqrt[3]{1-x}=-6$;

4) $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}=2$.

Решить неравенство (**269—270**).

269. 1) $\sqrt{x+1}<x-1$;

2) $\sqrt{1-x}>x+1$;

3) $\sqrt{3x-2}>x-2$;

4) $\sqrt{2x+1}\leqslant x+1$.

270*. 1) $\dfrac{x^2-13x+40}{\sqrt{19x-x^2-78}}\leqslant 0$;

2) $\dfrac{\sqrt{2x^2+7x-4}}{x+4}<\dfrac{1}{2}$.

271*. При различных значениях a решить неравенство:

1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-6}<a$;

2) $2x+\sqrt{a^2-x^2}>0$.

Историческая справка

Учение о степенных функциях развивалось параллельно с расширением понятия степени (начиная со степеней с натуральными показателями и заканчивая понятием степени с любым действительным показателем). Так, равенством $a^0=1$ (где $a\neq 0$) пользовался в начале XV в. самаркандский ученый *ал-Каши*. В XV же веке французский математик *Н. Шюке* ввел понятие отрицательного показателя степени. Идея введения дробных показателей встречается еще в XIV в. в работах французского ученого *Н. Орема*, где в словесной формулировке он описал правила действий со степенями.

Современную символику степеней с нулевым, отрицательным и дробным показателями начал использовать английский математик *Д. Валлис* (1616—1703), а общепринятой эта символика стала после употребления ее *И. Ньютоном* (1643—1727) в своих работах.

В начале XVII в., в результате открытия метода координат и аналитической геометрии, появились графический метод исследования функций и графический способ решения уравнений.

Ньютон называл все кривые, задаваемые функцией

$$y=ax+bx^2+cx^3+\ldots+px^n,$$

параболическими кривыми, хотя традиционно все же этим термином называют графики функций

$$y=cx^m,$$

где c — положительное действительное число, m — положительное рациональное число. Если $m<0$, то графики функций $y=cx^m$ называют *гиперболическими кривыми*.

§ 14. Логарифмы

Задача 1. Найти положительный корень уравнения $x^4 = 81$.

Δ По определению арифметического корня имеем

$$x = \sqrt[4]{81} = 3. \quad \blacktriangle$$

Задача 2. Решить уравнение $3^x = 81$.

Δ Запишем данное уравнение так: $3^x = 3^4$, откуда $x = 4$. ▲

В задаче 1 неизвестным является только основание степени, а в задаче 2 — показатель степени.

Способ решения задачи 2 состоял в том, что левую и правую части уравнения удалось представить в виде степени с одним и тем же основанием 3. Но уже, например, уравнение $3^x = 80$ таким способом решить не удается. Однако вы знаете, что это уравнение имеет корень. Чтобы уметь решать такие уравнения, вводится понятие *логарифма числа.*

В § 5 было сказано, что уравнение $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, имеет единственный корень. Этот корень называют логарифмом числа b по основанию a и обозначают $\log_a b$. Например, корнем уравнения $3^x = 81$ является число 4, т.е. $\log_3 81 = 4$.

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b.

Например, $\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$; $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, так как $3^{-2} = \frac{1}{9}$; $\log_7 7 = 1$, так как $7^1 = 7$, $\log_4 1 = 0$, так как $4^0 = 1$.

Определение логарифма можно кратко записать так:

$$\boxed{a^{\log_a b} = b.}$$

Это равенство справедливо при $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Его обычно называют *основным логарифмическим тождеством.*

Например, $4^{\log_4 5} = 5$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} = 3$; $13^{\log_{13} \frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$.

С помощью основного логарифмического тождества можно показать, например, что $x = \log_3 80$ является корнем уравнения $3^x = 80$. В самом деле, $3^{\log_3 80} = 80$.

Задача 3. Вычислить $\log_{64} 128$.

Δ Обозначим $\log_{64} 128 = x$. По определению логарифма $64^x = 128$. Так как $64 = 2^6$, $128 = 2^7$, то $2^{6x} = 2^7$, откуда $6x = 7$, $x = \frac{7}{6}$.

Ответ. $\log_{64} 128 = \frac{7}{6}$. ▲

Задача 4. Вычислить $3^{-2\log_3 5}$.

Δ Используя свойства степени и основное логарифмическое тождество, находим

$$3^{-2\log_3 5} = (3^{\log_3 5})^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{25}. \quad ▲$$

Задача 5. Решить уравнение $\log_3 (1 - x) = 2$.

Δ По определению логарифма $3^2 = 1 - x$, откуда $x = -8$. ▲

Задача 6. При каких значениях x существует $\log_5 \frac{x-1}{2-x}$?

Δ Так как основание логарифма $5 > 0$ и $5 \neq 1$, то данный логарифм существует только тогда, когда $\frac{x-1}{2-x} > 0$.

Решая это неравенство, находим $1 < x < 2$. ▲

Упражнения

Найти $\log_a x$, исходя из равенства $x = a^y$ (272–273).

272. 1) $x = 27$, $a = 3$, $y = 3$;
2) $x = 625$, $a = 5$, $y = 4$;
3) $x = 9$, $a = \frac{1}{3}$, $y = -2$;
4) $x = 2$, $a = \frac{1}{8}$, $y = -\frac{1}{3}$.

273. 1) $x = 4$, $a = 16$, $y = \frac{1}{2}$;
2) $x = 9$, $a = 27$, $y = \frac{2}{3}$;
3) $x = 7$, $a = 7$, $y = 1$;
4) $x = 1$, $a = 16$, $y = 0$.

Проверить справедливость равенства (274–276).

274. 1) $\log_{15} 225 = 2$;
2) $\log_4 256 = 4$;
3) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$;
4) $\log_7 \frac{1}{343} = -3$.

275. 1) $\log_{\frac{1}{4}} 64 = -3$;
2) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = 3$;
4) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64} = 6$.

276. 1) $\log_{11} 1 = 0$; 3) $\log_{16} 64 = \frac{3}{2}$;

2) $\log_7 7 = 1$; 4) $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$.

277. Найти логарифмы чисел по основанию 3:

$3;\ 9;\ 27;\ 81;\ 1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{243};\ \sqrt[3]{3};\ \frac{1}{3\sqrt{3}};\ 9\sqrt[4]{3}$.

Вычислить (278–285).

278. 1) $\log_2 16$; 2) $\log_2 64$; 3) $\log_2 2$;

4) $\log_2 1$; 5) $\log_2 \frac{1}{2}$; 6) $\log_2 \frac{1}{8}$.

279. 1) $\log_3 27$; 2) $\log_3 81$; 3) $\log_3 3$;

4) $\log_3 1$; 5) $\log_3 \frac{1}{9}$; 6) $\log_3 \frac{1}{3}$.

280. 1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; 3) $\log_{0,5} 0,125$;

4) $\log_{0,5} \frac{1}{2}$; 5) $\log_{0,5} 1$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2}$.

281. 1) $\log_5 625$; 2) $\log_6 216$; 3) $\log_4 \frac{1}{16}$; 4) $\log_5 \frac{1}{125}$.

282. 1) $\log_{\frac{1}{5}} 125$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 27$; 3) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$; 4) $\log_{\frac{1}{6}} 36$.

283. 1) $3^{\log_3 18}$; 2) $5^{\log_5 16}$; 3) $10^{\log_{10} 2}$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 6}$.

284. 1) $3^{5\log_3 2}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}} 2}$; 3) $0,3^{2\log_{0,3} 6}$; 4) $7^{\frac{1}{2}\log_7 9}$.

285. 1) $8^{\log_2 5}$; 2) $9^{\log_3 12}$; 3) $16^{\log_4 7}$; 4) $0,125^{\log_{0,5} 1}$.

286. Решить уравнение:

1) $\log_6 x = 3$; 2) $\log_5 x = 4$; 3) $\log_2 (5 - x) = 3$;

4) $\log_3 (x + 2) = 3$; 5) $\log_{\frac{1}{4}} \left(x - \frac{1}{2}\right) = -2$; 6) $\log_{\frac{1}{6}} (0,5 + x) = -1$.

287. Выяснить, при каких значениях x существует логарифм:

1) $\log_{\frac{1}{2}} (4 - x)$; 2) $\log_{0,2} (7 - x)$; 3) $\log_6 \frac{1}{1-2x}$;

4) $\log_8 \frac{5}{2x-1}$; 5) $\log_{\frac{1}{4}} (-x^2)$; 6) $\log_{0,7} (-2x^3)$.

Вычислить (288–294).

288. 1) $\log_2 \sqrt[4]{2}$; 2) $\log_3 \frac{1}{3\sqrt{3}}$; 3) $\log_{0,5} \frac{1}{\sqrt{32}}$; 4) $\log_7 \frac{\sqrt[3]{7}}{49}$.

289. 1) $\log_{32} 64$; 2) $\log_{27} 243$; 3) $\log_{81} 27$; 4) $\log_{128} 8$.

290. 1) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$; 3) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} 25\sqrt[3]{5}$;

2) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{25\sqrt[4]{5}}$; 4) $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}} 6\sqrt[5]{36}$.

291. 1) $\log_{10}(0,01)$; 3) $\log_{10}(10\sqrt[3]{100})$;

2) $\log_{10} \frac{1}{1000}$; 4) $\log_{10}(100\sqrt[5]{10})$.

292. 1) $(0,1)^{-\log_{10} 0,3}$; 2) $10^{-\log_{10} 4}$; 3) $5^{-\log_5 3}$; 4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\log_6 4}$.

293. 1) $9^{2\log_3 5}$; 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}\log_3 4}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5\log_2 3}$;

4) $27^{-4\log_{\frac{1}{3}} 5}$; 5) $10^{3-\log_{10} 5}$; 6) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+2\log_{\frac{1}{7}} 3}$.

294. 1) $\log_2 \log_3 81$; 4) $\frac{1}{3}\log_9 \log_2 8$;

2) $\log_3 \log_2 8$; 5) $\log_4 \log_{16} 256 + \log_4 \sqrt{2}$;

3) $2\log_{27} \log_{10}(1000)$; 6) $3\log_2 \log_4 16 + \log_{\frac{1}{2}} 2$.

295. Решить уравнение:

1) $\log_x 27 = 3$; 2) $\log_x \frac{1}{7} = -1$; 3) $\log_x \sqrt{5} = \frac{1}{4}$;

4) $\log_x \sqrt{5} = -4$; 5) $\log_x \left(\sqrt{3}\right)^3 = \frac{1}{2}$; 6) $\log_x 8 = -0,6$.

Выяснить, при каких значениях x существует логарифм (296–298).

296. 1) $\log_6(49 - x^2)$; 3) $\log_3(2 - x - x^2)$;

2) $\log_7(x^2 + x - 6)$; 4) $\log_3(x^2 - 3x + 2)$.

297. 1) $\log_9(x^2 + 4x + 4)$; 4) $\log_{\frac{1}{4}}(6x - 10 - x^2)$;

2) $\log_{0,5}\left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right)$; 5) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 + 4)$;

3) $\log_5(6x - x^2 - 9)$; 6) $\log_\pi(2x^2 - x + 10)$.

298. 1) $\log_{0,5}\frac{x}{2x-1}$; 2) $\log_{11}\frac{2-x}{3x}$; 3) $\log_{36}\frac{2x+4}{x-3}$; 4) $\log_6\frac{4-x}{3x+5}$.

Решить уравнение (**299–303**).

299. 1) $\log_{\sqrt{3}}(2x-1)=4$; 2) $\log_{\sqrt{2}}(3x-4)=6$.

300. 1) $2^x=5$; 2) $(1,2)^x=4$; 3) $3^{4x}=10$; 4) $2^{3x}=3$.

301. 1) $4^{2x+3}=5$; 3) $(1,3)^{3x-2}=3$;

2) $7^{1-2x}=2$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5+4x}=1,5$.

302. 1) $7^{2x}+7^x-12=0$; 5) $25^x+2\cdot5^x-15=0$;

2) $9^x-3^x-12=0$; 6) $\left(\frac{1}{9}\right)^x-5\left(\frac{1}{3}\right)^x+6=0$;

3) $16^x-4^{x+1}-14=0$; 7) $9^{x+1}-3^{x+1}\cdot9=-8$;

4) $8^{x+1}-8^{2x-1}=30$; 8) $64^x-8^{x+1}=-15$.

303*. 1) $(3^x+2^x)(3^x+3\cdot2^x)=8\cdot6^x$;

2) $(3\cdot5^x+2,5\cdot3^x)(2\cdot3^x-2\cdot5^x)=8\cdot15^x$.

304*. Выяснить, при каких значениях x имеют смысл выражения:

1) $\log_x(2x-1)$; 3) $\log_{(x+1)}|x-2|$;

2) $\log_{x-1}(x+1)$; 4) $\log_{|x+2|}(1-x)$.

305.** Найти все значения a, при которых уравнение

$$9^x+9a(1-a)\cdot3^{x-2}-a^3=0$$

имеет корни, и решить это уравнение.

§ 15. Свойства логарифмов

При выполнении преобразований выражений, содержащих логарифмы, при вычислениях и при решении уравнений часто используются разные *свойства логарифмов*. Рассмотрим основные из них.

Пусть $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $c>0$, r — любое действительное число. Тогда справедливы формулы:

$$\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c, \qquad (1)$$

$$\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c, \qquad (2)$$

$$\log_a b^r=r\log_a b. \qquad (3)$$

○ По основному логарифмическому тождеству

$$a^{\log_a b} = b, \qquad (4)$$

$$a^{\log_a c} = c. \qquad (5)$$

1. Перемножая равенства (4) и (5), получаем

$$a^{\log_a b + \log_a c} = bc,$$

откуда по определению логарифма $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$. Формула (1) доказана.

2. Разделив равенства (4) и (5), получим

$$a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{b}{c},$$

откуда по определению логарифма следует формула (2).

3. Возводя основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$ в степень с показателем r, получаем

$$a^{r \log_a b} = b^r,$$

откуда по определению логарифма следует формула (3). ●

Приведем примеры применения формул (1) — (3):

1) $\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 36 = 2$;

2) $\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} 12 = 1$;

3) $\dfrac{\log_3 4}{\log_3 4^{\frac{1}{7}}} = \dfrac{\log_3 4}{\frac{1}{7}\log_3 4} = 7$.

Задача 1. Вычислить $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50$.

Δ Применяя формулы (1) — (3), находим

$$\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50 = \log_5 \frac{\sqrt{3}\cdot 50}{\sqrt{12}} = \log_5 25 = 2. \ ▲$$

Задача 2. Доказать, что если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $p \neq 0$, то $\log_{a^p} b = \frac{1}{p}\log_a b$.

Δ Пусть $\log_{a^p} b = x$, тогда по определению логарифма $b = a^{px}$, а $\log_a b = \log_a a^{px}$, по свойству (3) $\log_a a^{px} = px \cdot \log_a a = px$, следовательно, $\log_a b = p \cdot \log_{a^p} b$ или $\log_{a^p} b = \frac{1}{p}\log_a b$. ▲

Упражнения

Вычислить (306–310).

306. 1) $\log_8 16 + \log_8 4$; 3) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$;

2) $\log_6 8 + \log_6 27$; 4) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$.

307. 1) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$;

2) $\log_5 75 - \log_5 3$; 4) $\log_8 \frac{1}{16} - \log_8 32$.

308. 1) $\log_{13} \sqrt[5]{169}$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{243}$;

2) $\log_{11} \sqrt[3]{121}$; 4) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[6]{128}}$.

309. 1) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$;

2) $\log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 10$;

3) $\frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$;

4) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$;

5) $4\log_{\frac{1}{2}} 3 - \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27 - 2\log_{\frac{1}{2}} 6$;

6) $\frac{2}{3}\log_{10} 0{,}001 + \log_{10} \sqrt[3]{1000} - \frac{3}{5}\log_{10} \sqrt{10000}$.

310. 1) $\dfrac{\log_3 8}{\log_3 16}$; 3) $\dfrac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$;

2) $\dfrac{\log_5 27}{\log_5 9}$; 4) $\dfrac{\log_7 8}{\log_7 15 - \log_7 30}$.

311. Найти x по данному его логарифму ($a > 0$, $b > 0$):

1) $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} a - \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{2}} b$;

2) $\log_5 x = 2\log_5 a - 3\log_5 b$; 4) $\log_{\frac{2}{3}} x = \frac{1}{4}\log_{\frac{2}{3}} a + \frac{4}{7}\log_{\frac{2}{3}} b$.

312. Выразить $\log_2 x$ через $\log_2 a$, $\log_2 b$, $\log_2 c$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$:

1) $x = a^3 b^2 \sqrt{c}$; 3) $x = \dfrac{\sqrt[3]{a^3 b^2}}{\sqrt[3]{c^2}}$;

2) $x = \dfrac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3}$; 4) $x = \dfrac{\sqrt[4]{c^5}}{\sqrt[5]{a^2 b^3}}$.

Вычислить (313–315).

313. 1) $\dfrac{\log_2 24-\frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18-\frac{1}{3}\log_3 72}$; 3) $\dfrac{\log_2 4+\log_2\sqrt{10}}{\log_2 20+3\log_2 2}$;

2) $\dfrac{\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30-\frac{1}{2}\log_6 150}$; 4) $\dfrac{3\log_7 2-\frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2+\frac{1}{3}\log_5 27}$.

314. 1) $36^{\log_6 5}+10^{1-\log_{10} 2}-8^{\log_2 3}$;

2) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125} 8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$;

3) $16^{1+\log_4 5}+4^{\frac{1}{2}\log_2 3+3\log_8 5}$;

4) $72\cdot\left(49^{\frac{1}{2}\log_7 9-\log_7 6}+5^{-\log_{\sqrt{5}} 4}\right)$.

315. 1) $\log_{36} 2-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{6}} 3$;

2) $2\log_{25} 30+\log_{0,2} 6$;

3) $\log_{\sqrt{3}} 7+\log_9 25+\log_{81} 16-\log_3 1470$;

4) $\log_{0,01} 0{,}64+\log_{100} 0{,}16+\log_{\sqrt{10}}\sqrt{20}$.

316. Выразить данный логарифм через логарифм с основанием 2:

1) $\log_4 7$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 5$; 3) $\log_{\sqrt{2}} 15$; 4) $\log_8 0{,}1$.

317. Доказать, что при $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, $p\neq 0$ справедлива формула

$$\log_{a^p} x^p=\log_a x.$$

318. Вычислить:

1) $\dfrac{2\log_2 3}{\log_4 9}$; 2) $\dfrac{\log_{\frac{1}{27}} 8}{-3\log_{\frac{1}{3}} 2}$; 3) $\dfrac{\log_{\frac{1}{25}} 7}{\log_{25} 49}$; 4) $\dfrac{-3\log_{\frac{1}{16}} 17}{\log_{0{,}25} 17}$.

319. Выразить через a и b:

1) $\log_{\sqrt{3}} 50$, если $\log_3 15=a$, $\log_3 10=b$;

2) $\log_4 1250$, если $\log_2 5=a$.

320. Доказать, что при $a > 0$, $a \neq 1$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ справедливы формулы:

1) $\log_a |x_1 x_2| = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|$;

2) $\log_a \left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|$.

321. Решить уравнение:

1) $\log_{x^2} 9 + \log_{\sqrt{x}} 4 = 2$;

2) $\log_{x^2} 16 - \log_{\sqrt{x}} 7 = 2$;

3) $\log_{\sqrt[3]{x}} 5 + \log_{x^2} 64 = 3$;

4) $2 \log_x 7 - \frac{1}{2}\log_{x^2} 16 + \frac{1}{4}\log_{\sqrt{x}} 64 = 2$;

5) $\log_{\frac{1}{x}} 5 + \log_{\frac{1}{x^2}} 12 + \frac{1}{2}\log_x 3 = 1$;

6) $\frac{1}{2}\log_x 7 - \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} 3 - \log_{x^2} 28 = 1$.

§ 16. Десятичные и натуральные логарифмы. Формула перехода

Для логарифмов чисел составлены специальные таблицы (*таблицы логарифмов*). Логарифмы также вычисляют с помощью микрокалькулятора. И в том и в другом случае находятся только *десятичные* или *натуральные логарифмы*.

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e, где e — иррациональное число, приближенно равное 2,7. При этом пишут $\ln b$ вместо $\log_e b$.

Иррациональное число e играет важную роль в математике и ее приложениях. Число e можно представить как сумму

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} + \ldots .$$

Вычисление числа e на микрокалькуляторе проводится по программе

$$1 \boxed{F} \boxed{e^x} \ \mathbf{2{,}7182818}.$$

Отметим, что в записи числа $e \approx 2{,}718281828$ после первого десятичного знака 7 два раза подряд записан год рождения Л.Н. Толстого.

Вычисления на микрокалькуляторе $\lg b$ и $\ln b$ проводятся соответственно по программам (если на МК есть специальные клавиши F, lg и ln):

$$b\ \boxed{\mathrm{F}}\ \boxed{\lg} \qquad \text{и} \qquad b\ \boxed{\mathrm{F}}\ \boxed{\ln}$$

Например, вычисляя $\lg 13$, получаем

$$13\ \boxed{\mathrm{F}}\ \boxed{\lg}\ \ \mathbf{1{,}1139433;}$$

вычисляя $\ln 13$, получаем

$$13\ \boxed{\mathrm{F}}\ \boxed{\ln}\ \ \mathbf{2{,}5649493.}$$

Оказывается, что достаточно знать значения только десятичных или только натуральных логарифмов чисел, чтобы находить логарифмы чисел по любому основанию. Для этого используется *формула перехода* от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},} \tag{1}$$

где $b > 0$, $a > 0$ $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$.

Докажем справедливость формулы (1).

○* Запишем основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$. Возьмем от обеих его частей логарифмы по основанию c

$$\log_c a^{\log_a b} = \log_c b.$$

Используя свойство логарифма степени, получаем

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b, \text{ откуда } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \ ●$$

Из формулы (1) при $c = 10$ и $c = e$ получаются формулы перехода к десятичным и натуральным логарифмам

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}, \qquad \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}. \tag{2}$$

Из той же формулы (1) следует формула

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \tag{3}$$

Задача 1. С помощью микрокалькулятора МК-54 вычислить $\log_3 80$.

Δ 1) С помощью десятичных логарифмов

80 $\boxed{\text{F}}\boxed{\text{lg}}$ 3 $\boxed{\text{F}}\boxed{\text{lg}}$ $\boxed{\div}$ **3,9886927.**

2) С помощью натуральных логарифмов

80 $\boxed{\text{F}}\boxed{\text{ln}}$ 3 $\boxed{\text{F}}\boxed{\text{ln}}$ $\boxed{\div}$ **3,9886928.**

Ответ. $\log_3 80 \approx 3{,}99$. ▲

Формула перехода от одного основания логарифма к другому используется иногда при решении уравнений.

Задача 2. Решить уравнение $\log_2 x + \log_4 x = \frac{3}{2}$.

Δ По формуле перехода

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}.$$

Поэтому уравнение примет вид $\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x = \frac{3}{2}$, откуда $\log_2 x = 1$, $x = 2$. ▲

Задача 3. Решить уравнение $\log_3 x + 2\log_x 3 = 3$.

Δ По формуле (3) имеем $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$. Уравнение примет вид $\log_3 x + \frac{2}{\log_3 x} = 3$ или $(\log_3 x)^2 - 3\log_3 x + 2 = 0$. Решая это квадратное уравнение относительно $\log_3 x$, получаем: 1) $\log_3 x = 1$, $x_1 = 3$; 2) $\log_3 x = 2$, $x_2 = 9$.

Ответ. $x_1 = 3$, $x_2 = 9$. ▲

Задача 4. Двухпроцентный вклад в сбербанк, равный a руб., через n лет становится равным $a(1{,}02)^n$, а трехпроцентный вклад становится равным $a(1{,}03)^n$. Через сколько лет каждый из вкладов удвоится?

Δ 1) Для первого вклада $2a = a(1{,}02)^n$, откуда $(1{,}02)^n = 2$, $n = \log_{1,02} 2$. Вычисления проведем на МК-54:

2 $\boxed{\text{F}}\boxed{\text{ln}}$ 1,02 $\boxed{\text{F}}\boxed{\text{ln}}$ $\boxed{\div}$ **35,002788.**

2) Для второго вклада $n = \log_{1,03} 2$, и программа вычислений такова:

2 $\boxed{\text{F}}\boxed{\text{ln}}$ 1,03 $\boxed{\text{F}}\boxed{\text{ln}}$ $\boxed{\div}$ **23,449772.**

Ответ. По первому вкладу приблизительно через 35 лет, а по второму — через 23,5 года. ▲

Упражнения

Вычислить с помощью микрокалькулятора (322–323).

322. 1) $\lg 23$; 2) $\lg 7$; 3) $\lg 0{,}37$; 4) $\lg \frac{2}{3}$.

323. 1) $\ln 81$; 2) $\ln 2$; 3) $\ln 0{,}17$; 4) $\ln \frac{6}{7}$.

324. Выразить данный логарифм через десятичный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\log_7 25$; 2) $\log_5 8$; 3) $\log_9 0{,}75$; 4) $\log_{0,75} 1{,}13$.

325. Выразить данный логарифм через натуральный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\log_7 5$; 2) $\log_8 15$; 3) $\log_{0,7} 9$; 4) $\log_{1,1} 0{,}23$.

326. Выразить данный логарифм через логарифм с основанием 7:

1) $\log_5 3$; 2) $\lg 6$; 3) $\log_2 7$;

4) $\log_5 \frac{1}{3}$; 5) $\lg 7$; 6) $\log_3 7$.

327. Дано: $\lg 2 \approx 0{,}301$; $\lg 5 \approx 0{,}699$; $\lg 3 \approx 0{,}477$. Вычислить приближенно:

1) $\log_5 2$; 2) $\log_2 3$; 3) $\log_2 \sqrt{5}$;

4) $\log_5 0{,}25$; 5) $\log_2 25 + \log_5 0{,}5$; 6) $\log_3 \sqrt{125} + \log_5 27$.

328. Вычислить:

1) $5^{\frac{\lg 625}{\lg 25}}$; 2) $\log_{\frac{1}{4}} (\log_3 4 \cdot \log_2 3)$.

Решить уравнение (329–330).

329. 1) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$; 4) $\log_9 x^2 + \log_{\sqrt{3}} x = 3$;

2) $\log_3 x = 9\log_{27} 8 - 3\log_3 4$; 5) $\log_2 x + \log_8 x = 8$;

3) $\log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x = 9$; 6) $\log_4 x - \log_{16} x = \frac{1}{4}$.

330. 1) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$; 3) $\log_3 x \log_2 x = 4 \log_3 2$;

2) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$; 4) $\log_5 x \log_3 x = 9 \log_5 3$.

---

331. Дано: $\log_3 17 = m$. Найти: $\log_3 51$; $\log_{27} 17$; $\log_{27} 51$; $2\log_9 153$.

332. Дано: $\log_7 2 = m$. Найти: $\log_{49} 28$.

333. Дано: $\lg 3 = m$, $\lg 5 = n$. Найти: $\log_{15} 30$.

334. Дано: $\log_6 2 = m$. Найти: $\log_{24} 72$.

335. Дано: $\log_{36} 8 = m$. Найти: $\log_{36} 9$.

336. Дано: $\log_4 125 = m$. Найти: $\log_{10} 64$.

337. Вычислить:

1) $\dfrac{\log_3 216}{\log_8 3}-\dfrac{\log_3 24}{\log_{72} 3}$; 2) $\dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}-\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2}$.

338. Выразить число c через a и b, если:

1) $c=\log_{900} 600$; $a=\log_2 3$, $b=\log_5 2$;

2) $c=\log_{350} 140$; $a=\log_5 2$, $b=\log_7 5$.

Решить уравнение (**339—340**).

339. 1) $\log_2^2 x-9\log_8 x=4$; 3) $\log_3^2 x+5\log_9 x-1{,}5=0$;

2) $\log_3^2 x-15\log_{27} x+6=0$; 4) $16\log_{16}^2 x+3\log_4 x-1=0$.

340. 1) $\log_2 x+6\log_x 2=5$; 3) $\log_{\sqrt{3}} x-5\log_x 3=9$;

2) $\log_5 x-3\log_x 5=2$; 4) $2\log_x 3-\log_{\sqrt[3]{3}} x=5$.

341*. Вычислить (не используя микрокалькулятор):

1) $\dfrac{\log_5 2}{\log_5 6}+\dfrac{\log_4 3}{\log_4 6}$; 3) $\dfrac{2\log_2 3}{\log_4 9}$;

2) $\left(\log_7 2+\dfrac{1}{\log_5 7}\right)\lg 7$; 4) $\dfrac{\log_{27} 8}{\log_3 4}$.

342. Найти:

1) $\log_b(a^3 b)$, если $\log_a b=3$; 2) $\log_a(b^3 a)$, если $\log_b a=9$.

343.** Число жителей города-новостройки увеличивается ежегодно на 8%. Через сколько лет их число удвоится?

344.** При одном качании поршневого насоса из сосуда удаляется $1{,}2\%$ имеющегося в нем воздуха. Через сколько качаний насоса в сосуде останется $\dfrac{1}{10^{16}}$ часть первоначальной массы воздуха?

345.** Вычислить на микрокалькуляторе приближенное значение числа e по формуле

$$e\approx 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n}$$

при: 1) $n=7$; 2) $n=8$; 3) $n=9$; 4) $n=10$.

346*. Известно, что при больших положительных значениях n число e можно приближенно находить по формуле $e\approx\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Вычислить по этой формуле на микрокалькуляторе приближенное значение числа e при: 1) $n=100\,000$; 2) $n=1\,000\,000$.

§ 17. Логарифмическая функция, ее свойства и график

Вы знаете, что выражение $\log_a x$ определено при $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

Пусть задано основание логарифма $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда каждому $x > 0$ соответствует число $y = \log_a x$. Тем самым задана функция $y = \log_a x$.

Функцию $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называют ***логарифмической.***

Логарифмическая функция обладает следующими свойствами:

Свойство 1. *Область определения логарифмической функции — множество всех положительных чисел*, так как логарифм определен только для положительных чисел.

Свойство 2. *Множество значений логарифмической функции — множество **R** всех действительных чисел.*

○ Пусть задано $y \in R$. Тогда функция $\log_a x$ принимает значение y при $x = a^y$, так как $\log_a a^y = y$. Таким образом, любое действительное число y принадлежит множеству значений логарифмической функции. ●

Задача 1. Построить график функции $y = \log_3 x$.

Δ Составим таблицу ее значений:

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$y = \log_3 x$	−2	−1	0	1	2	3

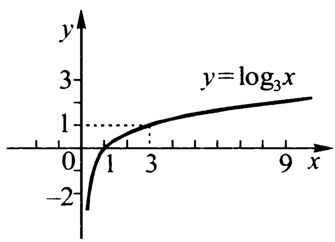


Рис. 35

Построим найденные точки и проведем через них кривую, учитывая, что функция $y = \log_3 x$ определена при $x > 0$ (рис. 35). ▲

Задача 2. Построить график функции $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Δ Составим таблицу ее значений:

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$y = \log_{\frac{1}{3}} x$	2	1	0	−1	−2	−3

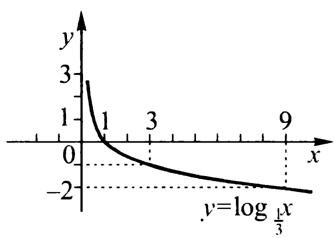


Рис. 36

Построим найденные точки и проведем через них кривую, учитывая, что функция $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ определена при $x > 0$ (рис. 36). ▲

Свойство 3. *Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является возрастающей, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$.*

○ Докажем, что при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ является возрастающей. Рассмотрим любые два числа из области определения данной функции, т.е. $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Пусть $x_1 < x_2$. Требуется доказать, что $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

По основному логарифмическому тождеству

$$x_1 = a^{\log_a x_1}, \qquad x_2 = a^{\log_a x_2}.$$

По условию $x_1 < x_2$, поэтому $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$.

Из этого неравенства и из свойств степени с действительным показателем и основанием $a > 1$ следует требуемое неравенство $\log_a x_1 < \log_a x_2$. Аналогично доказывается, что при $0 < a < 1$ функция $y = \log_a x$ является убывающей. ●

Свойство 4. Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ принимает *положительные значения* при $x > 1$, *отрицательные* — при $0 < x < 1$. Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при $0 < x < 1$, отрицательные — при $x > 1$.

Это следует из того, что функция $y = \log_a x$ принимает значение, равное нулю, при $x = 1$ и является возрастающей на промежутке $x > 0$, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$.

Из рассмотренных свойств логарифмической функции $y = \log_a x$ следует, что ее график расположен правее оси Oy и имеет вид, указанный на рисунке 37, если $a > 1$, и на рисунке 38, если $0 < a < 1$.

Отметим еще раз, что график любой логарифмической функции $y = \log_a x$ проходит через точку (1; 0).

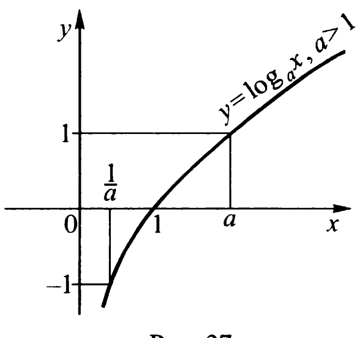


Рис. 37

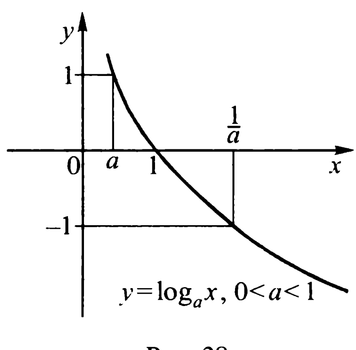


Рис. 38

Свойство 5. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ и показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, взаимно обратны (рис. 39 *а*, *б*).

○ Из формулы $y = a^x$ выразим x через y. По определению логарифма $y = \log_a y$. Меняя местами x и y, получаем $y = \log_a x$. ●

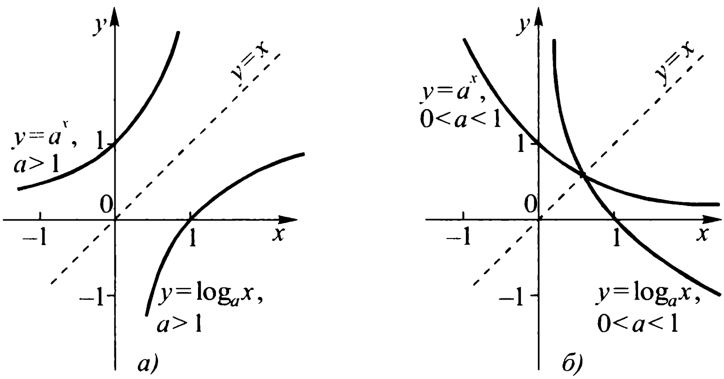


Рис. 39

Так как функции $y = \log_a x$ и $y = a^x$ взаимно обратны, то свойства любой из них можно установить, зная свойства другой. Например, множеством значений функции $y = a^x$ является множество $y > 0$, поэтому областью определения функции $y = \log_a x$ является множество $x > 0$; функция $y = a^x$ возрастает, если $a > 1$, поэтому функция $y = \log_a x$ также возрастает, если $a > 1$.

Задача 3. Сравнить числа:

1) $\log_5 3$ и $\log_5 6$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ и $\log_{\frac{1}{2}} 5$; 3) $\log_3 5$ и $\log_5 3$.

△ 1) Так как $5 > 1$, то функция $y = \log_5 x$ возрастает и поэтому $\log_5 3 < \log_5 6$.

2) Так как $0 < \frac{1}{2} < 1$, то функция $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ убывает и поэтому $\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 5$.

3) Заметим, что $\log_3 5 > 1$, так как $\log_3 3 = 1$ и функция $y = \log_3 x$ возрастает. Аналогично $\log_5 3 < 1$, так как $\log_5 5 = 1$ и функция $y = \log_5 x$ возрастает. Поэтому $\log_3 5 > \log_3 3$. ▲

Задача 4. Сравнить числа a и b, если:

1) $a = 7\log_5 2$, $b = 3$; 2) $a = \frac{1}{2}\log_4 65$, $b = \log_5 11$.

△ 1) $a = \log_5 2^7 = \log_5 128$, $b = 3 = \log_5 125$, $a > b$.

2) $a = \frac{1}{2}\log_4 65$; $2a = \log_4 65$; $b = \log_5 11$; $2b = 2\log_5 11 = \log_5 121$; $\log_4 65 > \log_4 64 = 3$; $\log_5 121 < \log_5 125 = 3$. Таким образом, $2a = \log_4 65 > 3$, $2b = \log_5 121 < 3$, следовательно, $a > b$. ▲

З а д а ч а 5*. Построить график функции:

1) $y = \log_3(x+2)$; 2) $y = 2 + \log_{\frac{1}{3}} x$.

Δ 1) График функции $y = \log_3(x+2)$ получается сдвигом графика функции $y = \log_3 x$ влево вдоль оси Ox на 2 единицы, так как эти функции принимают одинаковые значения, если аргумент первой из них на 2 единицы меньше соответствующего аргумента второй, т.е. $\log_3(x_0+2) = \log_3 x_1$, если $x_0 + 2 = x_1$ или $x_0 = x_1 - 2$ (рис. 40, *а*).

2) График функции $y = 2 + \log_{\frac{1}{3}} x$ получается сдвигом графика функции $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ вверх вдоль оси Oy на 2 единицы, так как при одном и том же значении x значение первой функции на 2 больше значения второй функции (рис. 40, *б*). ▲

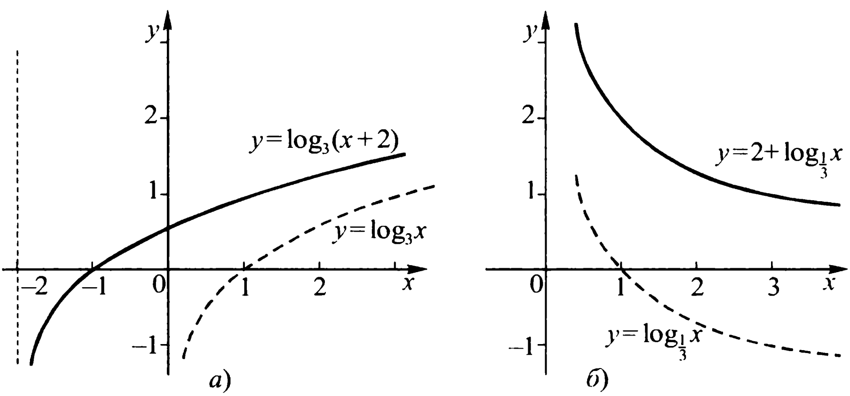


Рис. 40

Упражнения

347. Построить график функции:

1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Какие из данных функций являются возрастающими? убывающими? При каких значениях x каждая функция принимает положительные значения? отрицательные значения? значения, равные нулю?

348. По графику функции $y = \log_2 x$ найти приближенно:
$\log_2 3$; $\log_2 0{,}3$; $\log_2 5$; $\log_2 0{,}7$.

349. Изобразить схематически график функции:

1) $y = \log_{\sqrt{2}} x$;
2) $y = \log_{\pi} x$;
3) $y = \log_{0,4} x$;
4) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

350. Сравнить числа:

1) $\log_3 \frac{6}{5}$ и $\log_3 \frac{5}{6}$;
2) $\log_{\frac{1}{3}} 9$ и $\log_{\frac{1}{3}} 17$;
3) $\log_{\frac{1}{2}} e$ и $\log_{\frac{1}{2}} \pi$;
4) $\log_2 \frac{\sqrt{5}}{2}$ и $\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$.

351. Выяснить, является ли положительным или отрицательным число:

1) $\log_3 4{,}5$; 2) $\log_3 0{,}45$; 3) $\log_5 25{,}3$; 4) $\log_{0,5} 9{,}6$.

352. Сравнить с единицей число x, если:

1) $\log_3 x = -0{,}3$;
2) $\log_{\frac{1}{3}} x = 1{,}7$;
3) $\lg x = 0{,}2$;
4) $\log_2 x = 1{,}3$.

353. Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция:

1) $y = \log_{0,075} x$; 2) $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$; 3) $y = \lg x$; 4) $y = \ln x$.

354. Решить графически неравенство:

1) $\log_3 x \geqslant 3$; 2) $\log_2 x < 1$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x \leqslant 2$;
4) $\log_{\frac{1}{2}} x > 1$; 5) $\log_5 x > -1$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} x \leqslant -2$.

355. Найти область определения функции:

1) $y = \log_3 (x - 2)$;
2) $y = \log_{0,5} (2 + x)$;
3) $y = \log_5 (x^2 - 3x)$;
4) $y = \log_{\sqrt{2}} (9 - x^2)$.

---

356. Доказать, что:

1) функция $y = \log_2 (x^2 - 1)$ возрастает на промежутке $x > 1$;
2) функция $y = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1)$ убывает на промежутке $x > 1$.

357. Сравнить числа a и b, если:

1) $a = \log_5 6 + \log_6 5$, $b = 2$;
2) $a = \log_9 36$, $b = \log_{36} 288$;
3) $a = 2\log_2 7$, $b = 1 + 2\log_2 5$;
4) $a = \log_3 5$, $b = \log_2 3$.

358. Сравнить значения выражений:

1) $\frac{1}{2}+\lg 3$ и $\lg 19-\lg 2$;

2) $\frac{\lg 5+\lg\sqrt{7}}{2}$ и $\lg\frac{5+\sqrt{7}}{2}$;

3) $3(\lg 7-\lg 5)$ и $2\left(\frac{1}{2}\lg 9-\frac{1}{3}\lg 8\right)$;

4) $\lg(\lg 4)$ и $\lg\frac{1}{3}$.

359. Сравнить числа a и b, если:

1) $a=5^{\log_3 7}+\sqrt{7},\ b=7^{\log_3 5}+7^{\frac{1}{3}\log_7 19}$;

2) $a=3^{\log_5 6}+\sqrt[5]{6},\ b=6^{\log_5 3}+7^{\frac{1}{3}\log_7 3}$.

360. Построить график функции:

1) $y=\log_3(x-1)$;

2) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$;

3) $y=1+\log_3 x$;

4) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)$;

5) $y=1+\log_3(x-1)$;

6) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)-1$.

361. Найти область определения функции:

1) $y=\log_8(x^2-3x-4)$;

2) $y=\log_{\sqrt{3}}(-x^2+5x+6)$;

3) $y=\log_{0,7}\frac{x^2-4}{x+3}$;

4) $y=\log_{\frac{1}{3}}\frac{x-4}{x^2+4}$;

5) $y=\log_{0,3}(|4x-x^2|)$;

6) $y=\log_7(2x^2-7|x|+3)$;

7) $y=\log_\pi(3^x-3)$;

8) $y=\log_3(2^{x-1}-4)$.

362*. Решить графически уравнение:

1) $\log_2 x=-x+1$;

2) $\log_{\frac{1}{2}} x=2x-5$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} x=4x^2$;

4) $\log_3 x=2-\frac{1}{3}x^2$;

5) $\lg x=\sqrt{x}$;

6) $\lg x=2^{-x}$;

7) $\log_2(x-2)=\frac{2}{x}$;

8) $\log_{\frac{1}{2}}(1-x)=2^x$.

363*. Построить график функции:

1) $y=|\log_3 x|$;

2) $y=\log_3|x|$;

3) $y=\log_2|3-x|$;

4) $y=|1-\log_2 x|$;

5) $y=2^{\log_2 x+\log_2(x-1)}$;

6) $y=3^{\log_3(3-x)}+5^{\log_5(1-x)}$.

364*. Показать, что графики функций $y=\log_2 x$ и $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ симметричны относительно оси абсцисс.

365*. Найти область определения функции:

1) $y=\log_2|3-x|-\log_2|x^3-8|$;

2) $y=\log_{0,3}\sqrt{x+1}+\log_{0,4}(1-8x^3)$.

§ 18. Логарифмические уравнения

При решении логарифмических уравнений часто используется следующая теорема.

Теорема. Если $\log_a x_1=\log_a x_2$, где $a>0$, $a\neq 1$, $x_1>0$, $x_2>0$, то $x_1=x_2$.

○ Предположим, что $x_1\neq x_2$. Если $a>1$, то из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $\log_a x_1<\log_a x_2$; если $0<a<1$, то из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $\log_a x_1>\log_a x_2$. В обоих случаях имеем противоречие с условием $\log_a x_1=\log_a x_2$. Следовательно, $x_1=x_2$. ●

Задача 1. Решить уравнение $\log_5(3x-2)=\log_5 7$.

△ Используя доказанную теорему, получаем $3x-2=7$, откуда $3x=9$, $x=3$. ▲

Задача 2. Решить уравнение

$$\lg\frac{x+9}{x+1}=\lg x. \qquad (1)$$

△ Следствием уравнения (1) является уравнение

$$\frac{x+9}{x+1}=x. \qquad (2)$$

Умножая это уравнение на $x+1$, получаем

$$x+9=x(x+1), \qquad (3)$$

которое является следствием уравнений (1) и (2). Решая уравнение (3), находим $x+9=x^2+x$, $x^2=9$, откуда $x_1=3$, $x_2=-3$. Проверка показывает, что корнем исходного уравнения (1) является только $x_1=3$.

Ответ. $x=3$. ▲

При решении логарифмических уравнений также часто переходят от уравнения $\log_a f(x)=b$ к уравнению $f(x)=a^b$, где $a>0$, $a\neq 1$.

Теорема. *Пусть* $a>0$, $a\neq 1$. *Пусть дана функция* $y=f(x)$ *и действительное* число b. *Тогда уравнение*

$$\log_a f(x)=b \qquad (4)$$

и уравнение

$$f(x)=a^b \qquad (5)$$

равносильны.

○ Докажем, что каждый корень уравнения (4) является корнем уравнения (5) и, наоборот, каждый корень уравнения (5) — корень уравнения (4).

1) Пусть x_0 — некоторый корень уравнения (4), т.е. $f(x_0) > 0$ и равенство $\log_a f(x_0) = b$ верное. Тогда по определению логарифма верно равенство $f(x_0) = a^b$, т.е. x_0 — корень уравнения (5).

2) Пусть x_0 — некоторый корень уравнения (5), т.е. верно равенство $f(x_0) = a^b$. Так как $a > 0$, $a \neq 1$, то $f(x_0) > 0$ и по определению логарифма верно равенство $\log_a f(x_0) = b$, т.е. x_0 — корень уравнения (4). ●

З а д а ч а 3. Решить уравнение $\log_3 (x^2 + x + 3) = 2$.

Δ Исходное уравнение равносильно уравнению $x^2 + x + 3 = 3^2$, откуда $x^2 + x - 6 = 0$.

Решая это квадратное уравнение, находим корни $x_1 = 2$, $x_2 = -3$.

О т в е т: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$. ▲

Рассмотрим часто используемые преобразования логарифмического уравнения, которые заменяют данное уравнение его следствием.

1. *Если в уравнении сумму логарифмов двух выражений заменить логарифмом их произведения, то полученное уравнение будет следствием данного.*

Поясним на примере уравнения

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = b. \tag{6}$$

○ Если x_0 — корень уравнения (6), то по определению логарифмов $f(x_0) > 0$, $g(x_0) > 0$. Поэтому $f(x_0) \cdot g(x_0) > 0$ и выполняется равенство $\log_a f(x_0) + \log_a g(x_0) = \log_a [\, f(x_0) \cdot g(x_0)]$. Следовательно, x_0 — корень уравнения

$$\log_a [\, f(x) \cdot g(x)] = b, \tag{7}$$

т.е. уравнение (7) — следствие уравнения (6). ●

Отметим, что уравнение (7) может иметь корень, который не является корнем уравнения (6). Это объясняется тем, что неравенство $f(x) \cdot g(x) > 0$ может выполняться не только при $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, но и при $f(x) < 0$, $g(x) < 0$.

З а д а ч а 4. Решить уравнение

$$\log_2 (1 - x) = 3 - \log_2 (3 - x).$$

Δ Перенесем логарифм из правой части в левую:

$$\log_2 (1 - x) + \log_2 (3 - x) = 3,$$

откуда

$$\log_2 (1 - x)(3 - x) = 3,$$

$$(1 - x)(3 - x) = 8.$$

Решая это уравнение, получаем $x_1 = 5$, $x_2 = -1$.

Число $x_1 = 5$ не является корнем исходного уравнения, так как при $x = 5$ левая и правая части уравнения теряют смысл. Проверка показывает, что число $x = -1$ является корнем исходного уравнения.

О т в е т. $x = -1$. ▲

2. *Если в уравнении разность логарифмов двух выражений заменить логарифмом их частного, то полученное уравнение будет следствием данного.*

З а д а ч а 5. Решить уравнение

$$\log_4 (x^3 - x) - \log_4 x = \log_4 3. \tag{8}$$

Δ Заменяя разность логарифмов логарифмом частного, получаем уравнение

$$\log_4 \frac{x^3 - x}{x} = \log_4 3, \tag{9}$$

которое является следствием уравнения (8).

Уравнение (9) равносильно уравнению

$$\frac{x^3 - x}{x} = 3.$$

Решая это уравнение, находим его корни $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Проверкой убеждаемся, что $x_1 = 2$ — корень уравнения (8), а $x_2 = -2$ не является корнем уравнения (8).

О т в е т. $x = 2$. ▲

При решении задачи 5 посторонний корень $x_2 = -2$ появился при переходе от уравнения (8) к уравнению (9), т.е. оба уравнения неравносильны.

Отметим, что при решении логарифмических уравнений замена логарифма произведения (частного) суммой (разностью) логарифмов может привести к потере корней.

Например, уравнение $\log_2 (x + 1)(x + 3) = 3$ имеет два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = -5$, а уравнение $\log_2 (x + 1) + \log_2 (x + 3) = 3$ имеет только один корень $x_1 = 1$. При переходе от первого уравнения ко второму теряется корень $x_2 = -5$.

Рассмотрим еще примеры логарифмических уравнений.

З а д а ч а 6. Решить уравнение

$$\log_7 x^2 = 4. \tag{10}$$

Δ По определению логарифма это уравнение равносильно уравнению $x^2 = 7^4$, откуда $x = \pm 7^2 = \pm 49$.

О т в е т. $x_{1,2} = \pm 49$. ▲

Отметим, что уравнение (10) нельзя заменять уравнением $2\log_7 x = 4$, так как при этом теряется корень $x = -49$. Однако уравнение (10) равносильно уравнению $2\log_7 |x| = 4$, откуда $|x| = 49$, $x = \pm 49$.

З а д а ч а 7. Решить уравнение

$$\log_4 (2x - 1) \cdot \log_4 x = 2\log_4 (2x - 1). \tag{11}$$

Δ Преобразуем данное уравнение

$$\log_4 (2x - 1) \cdot \log_4 x - 2\log_4 (2x - 1) = 0,$$

$$\log_4 (2x - 1) (\log_4 x - 2) = 0.$$

Приравнивая каждый из множителей левой части уравнения нулю, получаем:

1) $\log_4 (2x - 1) = 0$, откуда $2x - 1 = 1$, $x_1 = 1$;

2) $\log_4 x - 2 = 0$, откуда $\log_4 x = 2$, $x_2 = 16$.

Проверка показывает, что оба значения x являются корнями исходного уравнения.

О т в е т. $x_1 = 1$, $x_2 = 16$. ▲

Отметим, что если обе части уравнения (11) разделить на выражение $\log_4 (2x - 1)$, то будет потерян корень $x = 1$.

З а д а ч а 8*. Найти все значения a, при которых уравнение $\log_2 x + \log_a x + \log_4 x = 1$ имеет корни.

Δ Перейдем к основанию 2

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 a} + \frac{1}{2}\log_2 x = 1.$$

Следствиями этого уравнения будут уравнения

$$\log_2 a \log_2 x + \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x \log_2 a = \log_2 a,$$

$$\left(\frac{3}{2}\log_2 a + 1\right) \cdot \log_2 x = \log_2 a, \quad \log_2 x^{\frac{3}{2}\log_2 a + 1} = \log_2 a, \quad x^{\frac{3}{2}\log_2 a + 1} = a,$$

откуда $x = a^{\frac{2}{3\log_2 a + 2}}$. Так как параметр a стоит в основании логарифма, то $a > 0$, $a \neq 1$, т.е. $3\log_2 a + 2 \neq 0$ и $a \neq 2^{-\frac{2}{3}}$.

О т в е т. При $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 2^{-\frac{2}{3}}$. ▲

Упражнения

Решить уравнение (366–375).

366. 1) $\log_3(5x-1)=2$; 4) $\log_7(x+3)=2$;

2) $\log_5(3x+1)=2$; 5) $\lg(3x-1)=0$;

3) $\log_4(2x-3)=1$; 6) $\lg(2-5x)=1$.

367. 1) $\log_3(5x+3)=\log_3(7x+5)$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)=\log_{\frac{1}{2}}(6x+8)$.

368. 1) $\log_2\frac{2}{x-1}=\log_2 x$; 3) $\lg\frac{x+8}{x-1}=\lg x$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{10}{7-x}=\log_{\frac{1}{2}} x$; 4) $\lg\frac{x-4}{x-2}=\lg x$.

369. 1) $\log_4(x^2-x)=1$; 4) $\log_2(x^2+2x-4)=2$;

2) $\log_7(x^2+3x)=2$; 5) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+3x-6)=-2$;

3) $\log_3(x^2-4x-2)=1$; 6) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+33)=-3$.

370. 1) $\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$; 3) $\lg(x+\sqrt{3})+\lg(x-\sqrt{3})=0$;

2) $\log_3(x-2)+\log_3(x+6)=2$; 4) $\lg(x-1)+\lg(x+1)=0$.

371. 1) $\lg(x-1)-\lg(2x-11)=\lg 2$;

2) $\lg(3x-1)-\lg(x+5)=\lg 5$;

3) $\log_7(2x^2-7x+6)-\log_7(x-2)=\log_7 x$;

4) $\log_3(x^3-x)-\log_3 x=\log_3 3$.

372. 1) $\frac{1}{2}\lg(x^2+x-5)=\lg 5x+\lg\frac{1}{5x}$;

2) $\frac{1}{2}\lg(x^2-4x-1)=\lg 8x-\lg 4x$.

373. 1) $\log_5 x^2=0$; 3) $\log_3 x^3=0$;

2) $\log_4 x^2=3$; 4) $\log_4 x^3=6$.

374. 1) $\log_7(x-1)\log_7 x=\log_7 x$;

2) $\log_{\frac{1}{3}} x\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)=\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)$;

3) $\log_2(3x+1)\log_3 x=2\log_2(3x+1)$;

4) $\log_{\sqrt{3}}(x-2)\log_5 x=2\log_3(x-2)$.

---

375. 1) $\lg x^4+\lg 4x=2+\lg x^3$; 2) $\lg x+\lg x^2=\lg 9x$.

Решить уравнение (376–388).

376. 1) $\log_4 (x+2)(x+3) + \log_4 \dfrac{x-2}{x+3} = 2;$ 3) $\log_3 x^2 - \log_3 \dfrac{x}{x+6} = 3;$

2) $\log_2 \dfrac{x-1}{x+4} + \log_2 (x-1)(x+4) = 2;$ 4) $\log_2 \dfrac{x+4}{x} + \log_2 x^2 = 5.$

377. 1) $2^{3\lg x} \cdot 5^{\lg x} = 1600;$ 3) $\dfrac{1}{4+\lg x} + \dfrac{2}{2-\lg x} = 1;$

2) $2^{\log_3 x^2} \cdot 5^{\log_3 x} = 400;$ 4) $\dfrac{1}{5-\lg x} + \dfrac{2}{1+\lg x} = 1.$

378. 1) $\log_2^2 (x-1) - 3\log_2 (x-1) = 4;$

2) $\log_2^2 (2-x) + 5\log_2 (2-x) = 6.$

379. 1) $\log_3 (x-1) + 2\log_9 (17+x) = 7 + \log_{\frac{1}{3}} 9;$

2) $\log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{3}} x = 6;$

3) $\log_{\sqrt{2}} x + 4\log_{x^2} x + \log_8 x = 16;$

4) $\log_{0,5}(x+2) - \log_2 (x-3) = \dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-4x-8).$

380. 1) $x^{\lg x} = 10;$ 4) $x^{3-\log_3 x} = 9;$

2) $x^{\log_3 x+1} = 9;$ 5) $x^{1-0,25\log_2 x} = 2;$

3) $0,1\, x^{\lg x - 3} = 1000;$ 6) $x^{2-\frac{\log_4 x}{2}} = 8.$

381. 1) $\log_2 x - 2\log_x 2 = -1;$ 3) $\log_3 x + 2\log_x 3 = 3;$

2) $\log_2 x + \log_x 2 = 2,5;$ 4) $\log_3 x - 6\log_x 3 = 1.$

382*. 1) $\log_{x^2} 9 + \log_{\sqrt{x}} 4 = 2;$ 2) $\log_{x^2} 16 - \log_{\sqrt{x}} 7 = 2.$

383*. 1) $\lg (6 \cdot 5^x - 25 \cdot 20^x) - \lg 25 = x;$

2) $\lg (2^x + x + 4) = x - x\lg 5.$

384. 1) $1 + \log_6 \dfrac{x+3}{x+7} = \dfrac{1}{4}\log_{\sqrt{6}} (x-1)^2;$ 2) $2\log_3 \dfrac{x-3}{x-7} + 1 = \log_3 \dfrac{x-3}{x-1}.$

385. 1) $\log_{x-2} (x-4) - \log_{x-2} (7-x) = 0;$

2) $\log_{x^2+7x-3} x^2 + \log_{x^2} (x^2+7x-3) - 2 = 0;$

3) $\log_{2x-1} (2x-3) = \log_{2x-3} (2x-1);$

4) $\log_{x+1} (x-0,5) = \log_{x-0,5} (x+1).$

386*. 1) $\lg^2 (x+1) = \lg (x+1)\lg(x-1) + 2\lg^2 (x-1);$

2) $2\log_5 (4-x)\log_{2x}(4-x) = 3\log_5 (4-x) - \log_5 2x.$

387*. 1) $\log_4[\log_3(\log_2 x)] = \frac{1}{2}$; 2) $\log_2[\log_9(\log_5^2(x-3))] = 0$.

388*. 1) $\sqrt{\log_x 25+3} = \frac{1}{\log_5 x}$; 2) $\sqrt{2\log_2^2 x + 3\log_2 x - 5} = \log_2(2x)$.

389*. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $5\log_5 x + \log_a x - 4\log_{25} x = a$ имеет корни, и решить это уравнение.

§ 19. Логарифмические неравенства

При решении логарифмических неравенств часто используется следующая теорема.

Теорема. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Если $\log_a x_1 < \log_a x_2$, то $x_1 < x_2$ при $a > 1$ и $x_1 > x_2$ при $0 < a < 1$.

○ Пусть, например, $a > 1$. Предположим, что неравенство $x_1 < x_2$ не выполняется, т.е. $x_1 \geqslant x_2$. Тогда по свойству возрастания функции $y = \log_a x$ при $a > 1$ должно выполняться неравенство $\log_a x_1 \geqslant \log_a x_2$, что противоречит условию. ●

Задача 1. Решить неравенство $\log_2 x < 3$.

Δ Заменяя 3 на $\log_2 8$, запишем неравенство в виде

$$\log_2 x < \log_2 8.$$

Так как функция $y = \log_2 x$ определена при $x > 0$ и возрастает, то неравенство $\log_2 x < \log_2 8$ выполняется тогда и только тогда, когда $x > 0$ и $x < 8$, т.е. при $0 < x < 8$.

Ответ. $0 < x < 8$. ▲

Графически решение неравенства $\log_2 x < 3$ сводится к нахождению тех значений x, при которых точки графика функции $y = \log_2 x$ лежат ниже прямой $y = 3$ (рис.41, a).

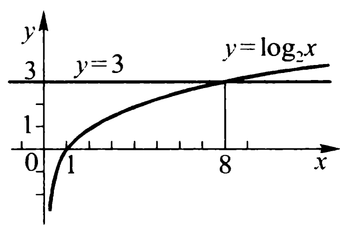


Рис. 41, a

Задача 2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant -2$.

Δ Так как $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$, то данное неравенство примет вид $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 9$.

Функция $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ определена при $x > 0$ и убывает, так как $0 < \frac{1}{3} < 1$. Следовательно, неравенство $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 9$ выполняется тогда и только тогда, когда $0 < x \leqslant 9$.

Ответ. $0 < x \leqslant 9$. ▲

Задача 3. Решить неравенство

$$\lg(x+1) \leqslant 2. \qquad (1)$$

Δ Правая часть данного неравенства имеет смысл при всех значениях x, а левая часть — при $x+1>0$, т.е. при $x>-1$. Промежуток $x>-1$ называют областью *определения неравенства* (1). Так как логарифмическая функция с основанием 10 возрастающая, то неравенство (1) при условии $x+1>0$ выполняется, если $x+1 \leqslant 100$ (так как $2 = \lg 100$). Таким образом, неравенство (1) *равносильно системе неравенств*

$$\begin{cases} x>-1, \\ x+1 \leqslant 100, \end{cases} \qquad (2)$$

т.е. неравенство (1) и система (2) имеют одно и то же множество решений. Решая систему (2), находим $-1<x \leqslant 99$. ▲

Приведем примеры решения более сложных логарифмических неравенств. Обычный способ решения таких неравенств заключается в переходе от них к более простому неравенству или системе неравенств, имеющей то же самое множество решений.

Например, неравенство $\lg(x+1) \leqslant 2$ имеет то же множество решений, что и система неравенств

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x+1 \leqslant 100. \end{cases}$$

Задача 4. Решить неравенство

$$\log_2(x-3) \leqslant 1-\log_2(x-2). \qquad (3)$$

Δ Логарифмическая функция определена при положительных значениях аргумента, поэтому левая часть неравенства имеет смысл при $x-3>0$, а правая часть — при $x-2>0$.

Следовательно, обе части неравенства одновременно имеют смысл при $x>3$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $x>3$.

Неравенство (3) при $x>3$ можно записать так:

$$\log_2(x-3)+\log_2(x-2) \leqslant 1$$

или

$$\log_2(x-3)(x-2) \leqslant \log_2 2. \qquad (4)$$

Логарифмическая функция с основанием 2 возрастающая. Поэтому при $x>3$ неравенство (4) выполняется одновременно с неравенством

$$(x-3)(x-2) \leqslant 2.$$

Таким образом, *исходное неравенство* (3) *равносильно системе неравенств*

$$\begin{cases} (x-3)(x-2) \leqslant 2, \\ x>3. \end{cases} \qquad (5)$$

Преобразуем первое неравенство системы $(x-3)(x-2) \leqslant 2$, $x^2-5x+6 \leqslant 2$, $x^2-5x+4 \leqslant 0$.

Решая квадратное неравенство, получаем $1 \leqslant x \leqslant 4$.

Учитывая, что $x > 3$, получаем $3 < x \leqslant 4$.

Ответ. $3 < x \leqslant 4$. ▲

Обычно при решении логарифмического неравенства сначала находят область определения данного неравенства.

Задача 5. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+15) \geqslant \log_{\frac{1}{3}}(x-1)-2. \qquad (6)$$

Δ Найдем область определения данного неравенства. Логарифм в левой части неравенства имеет смысл при $x > -15$, логарифм в правой части — при $x > 1$. Следовательно, оба логарифма определены при $x > 1$, т.е. область определения неравенства (6) — луч $x > 1$.

При $x > 1$ неравенство (6) можно записать в виде

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+15) - \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 9,$$

т.е.

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{x+15}{x-1} \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 9.$$

Так как основание логарифма $\frac{1}{3} < 1$, то при $x > 1$ имеем

$$\frac{x+15}{x-1} \leqslant 9.$$

Таким образом, *неравенство* (6) *равносильно системе*

$$\begin{cases} \dfrac{x+15}{x-1} \leqslant 9, \\ x > 1. \end{cases} \qquad (7)$$

Умножим обе части первого неравенства системы на $x-1$, при этом знак неравенства не изменится, так как $x-1 > 0$. Получим

$$\begin{cases} x+15 \leqslant 9(x-1), \\ x > 1. \end{cases}$$

Следовательно, неравенство (6) равносильно системе

$$\begin{cases} x+15 \leqslant 9x-9, \\ x > 1, \end{cases} \quad \text{т.е. системе} \quad \begin{cases} x \geqslant 3, \\ x > 1. \end{cases}$$

Ответ. $x \geqslant 3$. ▲

Задача 6. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 2x - 8) \geqslant 4. \qquad (8)$$

Область определения неравенства находится из условия $x^2 + 2x - 8 > 0$.

Неравенство (8) можно записать в следующем виде:

$$\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 2x - 8) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 16.$$

Так как логарифмическая функция с основанием $\frac{1}{2}$ является убывающей, то для всех x из области определения неравенства получаем

$$x^2 + 2x - 8 \leqslant 16.$$

Таким образом, *исходное неравенство (8) равносильно системе неравенств*

$$\begin{cases} x^2+2x-8>0, \\ x^2+2x-8 \leqslant 16 \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} x^2+2x-8>0, \\ x^2+2x-24 \leqslant 0. \end{cases}$$

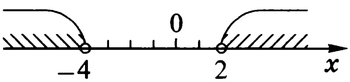


Рис. 41, *б*

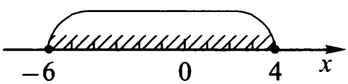


Рис. 41, *в*

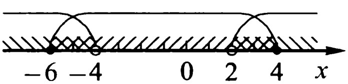


Рис. 41, *г*

Решая первое квадратное неравенство, получаем $x < -4$, $x > 2$ (рис. 41, *б*). Решая второе квадратное неравенство, получаем $-6 \leqslant x \leqslant -4$ (рис. 41, *в*). Следовательно, оба неравенства выполняются одновременно при $-6 \leqslant x < -4$ и при $2 < x \leqslant 4$ (рис. 41, *г*).

Ответ. $-6 \leqslant x < -4$, $2 < x \leqslant 4$. ▲

Задача 7*. Решить неравенство

$$3 - x < \log_5 (20 + 5^x).$$

Δ Данное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\log_5 5^{3-x} < \log_5 (20 + 5^x), \quad 5^{3-x} < 20 + 5^x, \quad 5^{2x} + 20 \cdot 5^x - 125 > 0,$$
$$(5^x - 5)(5^x + 25) > 0, \quad 5^x > 5, \quad \text{откуда } x > 1.$$

Ответ. $x > 1$. ▲

Задача 8*. Решить неравенство при разных значениях a:

$$\log_a x + \log_a (x + 1) > 2. \qquad (9)$$

Δ Областью определения неравенства являются все действительные значения $x > 0$, параметр a может принимать значения: $a > 0$, $a \neq 1$, так как стоит в основании логарифма.

При всех $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ данное неравенство можно представить в виде

$$\log_a (x(x+1)) > \log_a a^2. \qquad (10)$$

Рассмотрим два возможных случая решения неравенства: при $a > 1$ и $0 < a < 1$.

1) Если $a > 1$, то $x > 0$ и $x(x+1) > a^2$, так как логарифмическая функция с основанием больше единицы возрастающая. То есть неравенство (10) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ x(x-1) > a^2. \end{cases} \qquad (11)$$

Уравнение $x^2 + x - a^2 = 0$ имеет корни $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{1+4a^2}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$, где $x_1 < 0$, $x_2 > 0$. Следовательно, множество решений системы (11) — промежуток $x > x_2$, или $x > \dfrac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$.

2) Если $0 < a < 1$, то $x > 0$ и $x(x+1) < a^2$, так как логарифмическая функция с основанием меньше единицы убывающая. То есть неравенство (10) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ x(x+1) < a^2. \end{cases} \qquad (12)$$

Множество решений неравенства $x^2 + x - a^2 < 0$ — интервал $(x_1; x_2)$, а решением системы будет лишь интервал $(0; x_2)$.

Ответ. Нет решений при $a \leqslant 0$, $a = 1$; $x > \dfrac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$ при $a > 1$;

$0 < x < \dfrac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$ при $0 < a < 1$. ▲

Упражнения

Решить неравенство (390–391).

390. 1) $\log_5 x > \log_5 3$; 3) $\lg x < \lg 4$;

2) $\log_{\frac{1}{5}} x \leqslant \log_{\frac{1}{5}} \dfrac{1}{8}$; 4) $\ln x > \ln 0{,}5$.

391. 1) $\log_3 x < 2$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant 16$;

2) $\log_{0,4} x > 2$; 4) $\log_{0,4} x \leqslant 2$.

392. Найти область определения функции:

1) $y = \lg(3x-2)$; 3) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2-2)$;

2) $y = \log_2(7-5x)$; 4) $y = \log_7(4-x^2)$.

Решить неравенство (393–395).

393. 1) $\log_3(x+2) < 3$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geqslant -2$;

2) $\log_8(4-2x) \geqslant 2$; 5) $\log_{\frac{1}{5}}(4-3x) \geqslant -1$;

3) $\log_3(x+1) < -2$; 6) $\log_{\frac{2}{3}}(2-5x) < -2$.

394. 1) $\lg x > \lg 8 + 1$; 3) $\log_2(x-4) < 1$;

2) $\lg x > 2 - \lg 4$; 4) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$.

395. 1) $\log_{15}(x-3) + \log_{15}(x-5) < 1$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) + \log_{\frac{1}{3}}(12-x) \geqslant -2$;

3) $\lg(3x-4) < \lg(2x+1)$;

4) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) > \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$.

---

396. Найти область определения функции:

1) $y = \log_5(x^2-4x+3)$; 4) $y = \sqrt{\log_3(6x^2+x-1)}$;

2) $y = \log_6 \dfrac{3x+2}{1-x}$; 5) $y = \sqrt{\lg x + \lg(x+2)}$;

3) $y = \sqrt{\log_2(x^2-2x+5)}$; 6) $y = \sqrt{\lg(x-1) + \lg(x+1)}$.

Решить неравенство (397–411).

397. 1) $\log_5 \dfrac{3x-2}{x^2+1} > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+3}{x-7} < 0$.

398. 1) $\log_8(x^2-4x+3) < 1$; 3) $\log_3(x^2+2x) > 1$;

2) $\log_6(x^2-3x+2) \geqslant 1$; 4) $\log_{\frac{2}{3}}(x^2-2{,}5x) < -1$.

399. 1) $\lg(x^2-8x+13) > 0$; 3) $\log_2(x^2+2x) < 3$;

2) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-5x+7) < 0$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6) \geqslant -3$.

400. 1) $\log_{0,2} x - \log_5(x-2) < \log_{0,2} 3$;

2) $\lg x - \log_{0,1}(x-1) > \log_{0,1} 0{,}5$.

401. 1) $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 x^2 > 0$; 2) $\log_3 \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1) < 1$.

402. 1) $\log^2_{0,2} x - 5\log_{0,2} x < -6$; 2) $\log^2_{0,1} x + 3\log_{0,1} x > 4$.

403. 1) $\frac{1}{5-\lg x} + \frac{2}{1+\lg x} < 1$; 2) $\frac{1}{\lg x} + \frac{1}{1-\lg x} < 1$.

404. 1) $\log_3 (2 - 3^{-x}) < x + 1 - \log_3 4$; 2) $\log_2 (6 + 2^x) > 4 - x$.

405. 1) $\log_3 (26 + 3^{-x}) < x + 3$; 2) $\log_2 (3 - 4^x) < \log_2 11 - 2x - 4$.

406*. 1) $\log_{x^2-3} (4x + 7) > 0$; 3) $\log_{x^2+2} (3x + 6) \leqslant 1$;

2) $\log_{\frac{x-1}{5x-6}} (\sqrt{6} - 2x) < 0$; 4) $\log_{\frac{1}{1+x^2}} (4x - 2) > -1$.

407*. $2^x + 2^{|x|} \geqslant 2\sqrt{2}$.

408*. $4^x \left(\sqrt{16^{1-x} - 1} + 2\right) < 4|4^x - 1|$.

409*. $\frac{2}{3^x - 1} \leqslant \frac{7}{9^x - 2}$.

410*. 1) $\log_{|3x+2|} x^2 \geqslant 2$; 2) $\log_{|2x+1|} x^2 \geqslant 2$.

411*. 1) $\sqrt{\log_3 (9x + 18)} \leqslant \log_3 (x + 2)$; 2) $\sqrt{\log_2 x} + \sqrt{\log_x 2} \geqslant \frac{4}{\sqrt{3}}$.

412*. Решить неравенство при различных значениях a:

1) $\log_a (x - 1) + \log_a x > 2$; 2) $\log^2_a x^2 > 1$.

Упражнения к главе IV

Вычислить (413—417).

413. 1) $\log_{15} 225$; 2) $\log_4 256$; 3) $\log_3 \frac{1}{243}$; 4) $\log_7 \frac{1}{343}$.

414. 1) $\log_{\frac{1}{4}} 64$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 81$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64}$.

415. 1) $\log_{11} 1$; 2) $\log_7 7$; 3) $\log_{16} 64$; 4) $\log_{27} 9$.

416. 1) $(0,1)^{-\lg 0,3}$; 2) $10^{-\lg 4}$; 3) $5^{-\log_5 3}$; 4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\log_6 4}$.

417. 1) $4\log_{\frac{1}{2}} 3 - \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27 - \log_{\frac{1}{2}} 6$;

2) $\frac{2}{3}\lg 0,001 + \lg \sqrt[3]{1000} - \frac{3}{5}\lg \sqrt{10000}$.

418. Сравнить числа a и b, если $a = 2\log_3 4$, $b = 3\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{17}$.

419. Вычислить с помощью микрокалькулятора:
1) $\log_8 7$; 2) $\log_3 12$; 3) $\log_{1,3} 0{,}17$; 4) $\log_{0,3} 81$.

420. Построить графики функций:
1) $y = \log_4 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

Какая из данных функций является возрастающей? убывающей? При каких значениях x каждая функция принимает положительные значения? отрицательные значения? значения, равные нулю?

421. Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция:
1) $y = \log_{0,2} x$; 2) $y = \log_{\sqrt{5}} x$; 3) $y = \log_{\frac{1}{e}} x$; 4) $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$.

422. Решить графически уравнение:
1) $\log_3 x = 5 - x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = 3x$.

423. Найти область определения функции:
1) $y = \log_7 (5 - 2x)$; 2) $y = \log_2 (x^2 - 2x)$.

Решить уравнение (**424–426**).

424. 1) $\log_3 (3x - 1) = 2$; 3) $2\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} (2x^2 - x)$;
2) $\log_{\frac{1}{2}} (7 - 8x) = -2$; 4) $\lg (x^2 - 2) = \lg x$.

425. 1) $\lg (x^2 - 2x) = \lg 30 - 1$; 3) $\lg^2 x - 3\lg x = 4$;
2) $\log_3 (2x^2 + x) = \log_3 6 - \log_3 2$; 4) $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 = 0$.

426. 1) $\log_2 (x - 2) + \log_2 (x - 3) = 1$;
2) $\log_3 (5 - x) + \log_3 (-1 - x) = 3$;
3) $\lg (x - 2) + \lg x = \lg 3$;
4) $\log_{\sqrt{6}} (x - 1) + \log_{\sqrt{6}} (x + 4) = \log_{\sqrt{6}} 6$.

Решить неравенство (**427–429**).

427. 1) $\log_2 (x - 5) \leqslant 2$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} (2x + 1) > -2$;
2) $\log_3 (7 - x) > 1$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} (3 - 5x) < -3$.

428. 1) $\log_3 (5 - 4x) < \log_3 (x - 1)$; 2) $\log_{0,3} (2x + 5) \geqslant \log_{0,3} (x + 1)$.

429. 1) $\lg (x^2 + 2x + 2) < 1$; 2) $\log_3 (x^2 + 7x - 5) > 1$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Вычислить:

$$\log_5 125;\quad \lg 0{,}01;\quad 2^{\log_2 3};\quad 3^{2\log_3 7};\quad \log_2 68 - \log_2 17.$$

2. Построить схематически график функции:

$$y = \log_{0,2} x;\qquad y = \log_2 x.$$

3. Сравнить числа:

$$\log_{0,2} 3 \text{ и } \log_{0,2} 2{,}5;\qquad \log_2 0{,}7 \text{ и } \log_2 1{,}2.$$

4. Решить уравнение:

$$\log_5 (3x+1) = 2;$$
$$\log_3 (x+2) + \log_3 x = 1;$$
$$\ln (x^2 - 6x + 9) = \ln 3 + \ln (x+3).$$

5. Решить неравенство:

$$\log_3 (x-1) \leqslant 2;\qquad \log_{\frac{1}{5}} (2-x) > -1.$$

Вычислить (430–431).

430. 1) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$; 2) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{25\sqrt[4]{5}}$; 3) $2^{2-\log_2 5}$;

4) $3{,}6^{\log_{3,6} 10 + 1}$; 5) $2\log_5 \sqrt{5} + 3\log_2 8$; 6) $\log_2 \log_2 \log_2 2^{16}$.

431. 1) $\frac{\log_5 30}{\log_{30} 5} - \frac{\log_5 150}{\log_6 5}$; 2) $\frac{\log_3 42}{\log_{126} 3} - \frac{\log_3 378}{\log_{14} 3}$.

432. Сравнить числа:

1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ и $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; 2) $2^{2\log_2 5 + \log_{\frac{1}{9}} 9}$ и $\sqrt{8}$.

433. Упростить выражение $\frac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b + \log_b a + 1)\cdot \log_a \frac{a}{b}}$.

434. Выразить $\log_{30} 64$ через числа $a = \lg 3$ и $b = \lg 5$.

435. Выразить $\log_{30} 8$ через числа $a = \lg 5$ и $b = \lg 3$.

436. Выразить $\log_{175} 56$ через числа $a = \log_{14} 7$ и $b = \log_{14} 5$.

437. Найти значения x, при которых справедливо неравенство:

1) $\log_x 8 < \log_x 10$; 2) $\log_x \frac{3}{4} < \log_x \frac{1}{2}$.

438. Решить графически уравнение:

1) $\log_3 x = \frac{3}{x}$; 2) $2^x = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Решить уравнение (439–445).

439. 1) $3^{4x}=10$; 2) $2^{3x}=3$; 3) $1{,}3^{3x-2}=3$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5+4x}=1{,}5$;

5) $16^x-4^{x+1}-14=0$; 6) $25^x+2\cdot5^x-15=0$.

440. 1) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\frac{11}{12}$; 3) $\log_3 x\cdot\log_2 x=4\log_3 2$;

2) $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x=6$; 4) $\log_5 x\cdot\log_3 x=9\log_5 3$.

441. 1) $\log_9\log_2\frac{2x-2}{x+2}=\frac{1}{2}$; 2) $\log_3\log_2\log_4(x^2-48)=0$.

442. 1) $\log_3(2-x^2)-\log_3(-x)=0$;

2) $\log_5(x^2-12)-\log_5(-x)=0$;

3) $\log_2\sqrt{x-3}+\log_2\sqrt{3x-7}=2$;

4) $\lg(x+6)-\lg\sqrt{2x-3}=\lg4$.

443. 1) $\log_{\sqrt{2}} x+4\log_4 x+\log_8 x=13$;

2) $\log_{0,5}(x+2)-\log_2(x-3)=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-4x-8)$.

444. 1) $\log_{\frac{1}{x}} 5+\log_{\frac{1}{x^2}} 12+\frac{1}{2}\log_x 3=1$;

2) $\frac{1}{2}\log_x 7-\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} 3-\log_{x^2} 28=1$;

3) $6\log_{4x} 2-5\log_x 2=0$;

4) $\log_5\frac{1}{x}+\log_x 25=1$.

445. 1) $\log_2\frac{2}{x-1}=\log_2 x$; 3) $\lg\frac{x+8}{x-1}=\lg x$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{10}{7-x}=\log_{\frac{1}{2}} x$; 4) $\lg\frac{x-4}{x-2}=\lg x$.

Решить неравенство (446–448).

446. 1) $\log_{\sqrt{6}}(x-4)+\log_{\sqrt{6}}(x+1)\leqslant2$;

2) $\log_{3\sqrt{2}}(x-5)+\log_{3\sqrt{2}}(x+12)\leqslant2$;

3) $\log_3(8x^2+x)>2+\log_3 x^2+\log_3 x$;

4) $\log_2 x+\log_2(x-3)>\log_2 4$;

5) $\log_{\frac{1}{5}}(x-10)-\log_{\frac{1}{5}}(x+2)\geqslant-1$;

6) $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+10)+\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+4)>-2$.

447*. 1) $4\log_4 x - 33\log_x 4 \leqslant 1$; 2) $\log_x 3 \leqslant 4\left(1+\log_{\frac{1}{3}} x\right)$.

448*. 1) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2 \dfrac{1+x}{1+1{,}5x}\right) > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_4\left(x^2-5\right)\right) > 0$.

449*. Доказать, что если последовательность положительных чисел является геометрической прогрессией, то их логарифмы по одному основанию образуют арифметическую прогрессию.

450*. Найти три последовательных члена геометрической прогрессии, если их сумма равна 62, а сумма их десятичных логарифмов равна 3.

451*. Построить график функции:

1) $y = \dfrac{1}{\log_2 x}$; 2) $y = \dfrac{1}{\ln x}$.

Решить уравнение (452–454).

452.** 1) $x^{\lg 9} + 9^{\lg x} = 6$; 2) $x^{3\lg^3 x - \frac{2}{3}\lg x} = 100\sqrt[3]{10}$.

453.** 1) $3 + 2\log_{x+1} 3 = 2\log_3 (x+1)$;

2) $1 + 2\log_{x+2} 5 = \log_5 (x+2)$.

454.** 1) $\log_2 (2^x - 5) - \log_2 (2^x - 2) = 2 - x$;

2) $\log_2 (2^x + 1) \cdot \log_2 (2^{x+1} + 2) = 2$;

3) $\log_{1-x} (3 - x) = \log_{3-x} (1 - x)$;

4) $\log_{3x+7} (5x + 3) = 2 - \log_{5x+3} (3x + 7)$.

Решить неравенство (455–456).

455.** 1) $\log_{\frac{1}{3}} (2^{x+2} - 4^x) \geqslant -2$; 2) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6^{x+1} - 36^x) \geqslant -2$.

456.** $\sqrt{13^x + 3} - \sqrt{\left|13^x - 4\right|} < 1$.

457.** Решить уравнение:

1) $\log_3 \dfrac{4x+11}{4x+1} + 1 = \log_3 \dfrac{x+4}{x-2}$;

2) $\log_2 x \cdot \log_2 (x - 3) + 1 = \log_2 (x^2 - 3x)$.

458.** Найти все значения a, при которых уравнение $\dfrac{\lg(ax)}{\lg(x+1)} = 2$ имеет только один корень.

459.** Решить неравенство $\dfrac{1}{\log_a x - 1} + \dfrac{1}{\log_a x^2 + 1} < 1$.

Историческая справка

Еще древнегреческий ученый Архимед в III в. до н.э. в своем сочинении «Псаммит» («Исчисление песчинок») рассматривал последовательность степеней одного и того же числа (основания):

$$a^0, a^1, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots$$

и высказал утверждение, которое в современной символике выглядит как

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Идея сведения действия умножения чисел, представленных в виде степеней одного и того же числа, к сложению их показателей появлялась в математических исследованиях ученых отвлеченно и вплоть до XVI—XVII вв. и не находила реального применения. В эти века практика поставила перед математиками задачи упрощения громоздких вычислений, связанных с расчетами сложных процентов в финансовом, страховом и кредитном делах. Вычислительные средства тогда были ограничены — использовались в основном операции с целыми числами и обыкновенными дробями, а десятичные дроби только входили в практику.

Чтобы воспользоваться обозначенной идеей, нужны были таблицы, в которых сопоставлялись бы последовательности степеней чисел с последовательностями их показателей. Первые таблицы сложных процентов составил в начале XVII в. нидерландский ученый и инженер *С. Стевин*. Эти таблицы были аналогичны по структуре таблицам логарифмов, которые практически одновременно закончили составлять швейцарец *И. Бюргли* (1552—1632) и англичанин *Дж. Непер* (1550—1617). Однако автором изобретения логарифмов и составителем первых *таблиц логарифмов* история считает Непера, так как он раньше Бюргли опубликовал (в 1614 г.) свою работу в этой области под названием «Описание удивительной таблицы логарифмов». Следует отметить, что термин «логарифм» первым в употребление ввел также Непер (слово «логарифм» возникло из сочетания греческих слов λο′γοσ — отношение и αριθμο′σ — число).

Для десятичной системы счисления, которой мы пользуемся, самым удобным основанием для таблиц логарифмов является число **10**. Действительно, любое положительное число N можно представить в стандартном виде $N = a \cdot 10^n$ (n — целое число, $1 \leqslant a < 10$). Так как порядок числа легко определяется, то для нахождения логарифма числа ($\lg N = n + \lg a$) достаточно иметь лишь таблицу мантисс (таблицу чисел $\lg a$, где $1 \leqslant a < 10$).

Усовершенствованные таблицы десятичных логарифмов, которыми пользовались в России десятки лет (пока их не вытеснили калькуляторы) были составлены отечественным педагогом-математиком *В.М. Брадисом*.

На основе той же идеи замены произведения степеней — суммой, частного — разностью показателей основана была конструкция *логарифмической линейки*, которой пользовались инженеры и математики всего мира более 300 лет. Изобретателем логарифмической линейки (в 1624 г.) считается английский ученый *Э. Гунтер*.

Десятичные логарифмы и сегодня часто используются в силу исторических традиций и удобств практики. Однако для математической науки и ее приложений более значимыми являются натуральные логарифмы. Важность логарифмической функции $y = \ln x$ объясняется тем, что в математике чаще всего используются показательные функции с основанием e, поэтому важны и обратные им функции.

Если считать, что идея логарифмической функции возникла у Непера при решении кинематических задач (эти задачи он решал ради составления таблиц логарифмов), то законченный вид теории логарифмической функции придал выдающийся математик XVIII в. *Л. Эйлер* (1707—1783). Отметим, что значительную часть своей жизни Эйлер, сын небогатого пастора из Базеля, провел в России, приняв в 1727 г. приглашение работать в только что организованной в Петербурге Академии наук. Ему принадлежат общие определения показательной и логарифмической функций как взаимно обратных, введение символа e для обозначения основания натуральных логарифмов.

После Эйлера развитие теории логарифмических функций происходило в основном в рамках математического анализа. Логарифмические функции, помимо кинематической, впоследствии приобрели геометрическую и аналитическую интерпретации.

Для *любознательных* продемонстрируем, как с помощью четырехзначных таблиц Брадиса школьники предыдущих поколений находили, например, значение произведения $N = \sqrt[5]{513{,}2} \cdot 0{,}505$:

$$\lg N = \lg(\sqrt[5]{513{,}2} \cdot 0{,}505) = \lg(513{,}2)^{\frac{1}{5}} + \lg(5{,}05 \cdot 10^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{5} \lg(5{,}132 \cdot 10^2) + \lg(5{,}05 \cdot 10^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{5}(\lg 5{,}132 + \lg 10^2) + \lg 5{,}05 + \lg 10^{-1} =$$

$$= \frac{1}{5} \lg 5{,}132 + \frac{1}{5} \cdot 2 + \lg 5{,}05 - 1 = -0{,}6 + \frac{1}{5} \lg 5{,}132 + \lg 5{,}05.$$

После выполнения этих преобразований в разделе таблиц «Мантиссы логарифмов» надо было найти значения lg 5,132 и lg 5,05. Приводим «нужную» часть этих таблиц, в которой подчеркнута мантисса-логарифм числа 5,132 («поправка» на четвертую значащую цифру 2 находится в правой части таблицы и прибавляется к последнему разряду подчеркнутого четырехзначного числа основной части таблицы). Мантисса-логарифм числа 5,05 в таблице выделена жирным шрифтом:

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	123	456	789
50	6990	6998	7007	7016	7024	**7033**	7042	7050	7059	7067	123	345	678
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	123	345	678
52													
⋮													

Итак, $\lg 5{,}132 \approx 0{,}7101 + 0{,}0002 = 0{,}7103,$
$\lg 5{,}05 \approx 0{,}7033.$

Окончательно: $\lg N \approx -0{,}6 + \frac{1}{5} \cdot 0{,}7103 + 0{,}7033 \approx 0{,}2454.$

После нахождения $\lg N$ с помощью раздела «Антилогарифмы» (в этих же таблицах) по числу 0,2454 находится число $N \approx 1{,}759$.

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В этой главе вы познакомитесь с разными полезными приемами решения систем уравнений, часть из которых вам известна.

§ 20. Способ подстановки

Задача 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-y-6=0, \\ x^2+4xy-2y^2=-29. \end{cases} \qquad (1)$$

Δ Из первого уравнения выразим y через x

$$y=3x-6 \qquad (2)$$

и подставим это выражение во второе уравнение

$$x^2+4x(3x-6)-2(3x-6)^2=-29. \qquad (3)$$

Упростив это уравнение, получим

$$5x^2-48x+43=0, \qquad (4)$$

откуда $x_1=1$, $x_2=8{,}6$. Подставляя эти значения в формулу $y=3x-6$, находим $y_1=-3$, $y_2=19{,}8$.

Ответ. (1; −3), (8,6; 19,8). ▲

Способ подстановки вам знаком, он является одним из самых простых и надежных способов решения систем уравнений. Приведем его обоснование на примере решения задачи 1.

○ Предположим, что существует решение $(x;\ y)$ системы (1), т.е. x и y — такие числа, что оба равенства (1) верны. Тогда из них по свойствам верных числовых равенств получается, что равенства (2)— (4) также верны. Из равенств (2) и (4) найдены $x_1=1$, $y_1=-3$, $x_2=8{,}6$, $y_2=19{,}8$.

Итак, предположив, что система (1) имеет решения, мы установили, что этими решениями могут быть только две найденные пары чисел. Но, может быть, наше предположение неверно? Поэтому докажем, что найденные две пары чисел в самом деле являются решениями системы (1).

Это можно сделать обычной проверкой: подставить найденные значения x и y в уравнения системы (1) и убедиться, что получаются верные числовые равенства. Однако можно доказать, что такая проверка необязательна, так как полученные данным способом пары чисел всегда являются решениями системы (если, конечно, не допущены ошибки при вычислении).

Приведем это доказательство.

Пусть x — корень уравнения (4), т.е. x — такое число, что равенство (4) является верным. Из него по свойствам верных числовых равенств получаем верное равенство (3). Считая y равным $3x - 6$, т.е. верным равенство (2), из равенств (2) и (3) имеем верные равенства, образующие систему (1). ●

Заметим, что приведенное рассуждение состояло из двух частей. Сначала, предположив, что данная система имеет решения, было установлено, какими они могут быть. Во второй части было показано, что решения системы существуют и найденные две пары чисел в самом деле являются решениями исходной системы.

Таким образом, способ подстановки обосновывается свойствами верных числовых равенств. Поэтому этот способ можно смело применять, не приводя каждый раз подробные доказательства.

Задача 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x = y^2 + 1, \\ xy = y^2 + y^3. \end{cases}$$

Δ Подставляя $x = y^2 + 1$ во второе уравнение, получаем $y^3 + y = y^2 + y^3$, откуда $y(y - 1) = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

По формуле $x = y^2 + 1$ находим $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Ответ. (1; 0), (2; 1). ▲

Задача 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - xy + 2y^2 = 16, \\ y^2 - 2xy - 3x^2 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Δ Выразим из второго уравнения y через x, решая это уравнение как квадратное относительно y:

$$y = x \pm \sqrt{x^2 + 3x^2} = x \pm 2x,$$

т.е. или $y = 3x$, или $y = -x$.

1) Подставляя $y = 3x$ в первое уравнение системы (5), имеем $16x^2 = 16$, $x_{1,2} = \pm 1$, $y_{1,2} = \pm 3$.

2) Подставляя $y = -x$ в первое уравнение системы (5), получаем $4x^2 = 16$, $x_{3,4} = \pm 2$, $y_{3,4} = \pm 2$.

Ответ. (1; 3), (−1; −3), (2; −2), (−2; 2). ▲

Задача 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 4y = 2, \\ 9x^2 - 16y^2 = 20. \end{cases} \qquad (6)$$

Δ Пусть $(x; y)$ — решение этой системы. Заметим, что второе уравнение можно записать так:

$$(3x - 4y)(3x + 4y) = 20,$$

а так как из первого уравнения $3x + 4y = 2$, то

$$(3x - 4y) \cdot 2 = 20,$$

т.е.

$$3x - 4y = 10.$$

Получилась система

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2, \\ 3x - 4y = 10, \end{cases} \qquad (7)$$

которая имеет то же самое решение $(x; y)$.

Наоборот, если $(x; y)$ — решение системы (7), то, умножая второе уравнение этой системы на первое, получаем систему (6), т.е. $(x; y)$ — решение системы (6).

Итак, обе системы (6) и (7) имеют одни и те же решения. Такие системы называют *равносильными*. Решая систему (7), находим $x = 2$, $y = -1$.

О т в е т. (2; −1). ▲

Проведенными при решении задачи 4 рассуждениями обоснована возможность подстановки значения выражения, содержащего неизвестные, из одного уравнения в другое.

З а д а ч а 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 4y^2 = 7, \\ x^3 + 8y^3 = 35. \end{cases}$$

Δ По формуле суммы кубов второе уравнение запишем так: $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = 35$.

Отсюда и из первого уравнения системы получаем

$$(x + 2y) \cdot 7 = 35,$$

откуда $x = 5 - 2y$.

Подставляя это значение x в первое уравнение исходной системы, получаем

$$(5 - 2y)^2 - 2y(5 - 2y) + 4y^2 = 7.$$

После упрощения этого уравнения находим

$$6y^2 - 15y + 9 = 0,$$

$y_1 = 1$, $y_2 = 1{,}5$, а из формулы: $x = 5 - 2y$ находим $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

О т в е т. (3; 1), (2; 1,5). ▲

Задача 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=12,\\ x-y=24.\end{cases}$$

Δ Первое уравнение системы имеет смысл, если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. При таких значениях x и y имеем

$$x-y=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right),$$

поэтому система такова:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=12,\\ \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=24,\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=12,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=24.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $\sqrt{x}=7$, $\sqrt{y}=5$. Следовательно, $x=49$, $y=25$.

Ответ. (49; 25). ▲

Задача 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_2 x-\log_2 y=1,\\ 4y^2+x-12=0.\end{cases}$$

Δ Первое уравнение системы имеет смысл, если $x>0$, $y>0$. При таких значениях x и y выразим x через y из первого уравнения системы $\log_2 \frac{x}{y}=\log_2 2$, $\frac{x}{y}=2$; $x=2y$. Подставляя $x=2y$ во второе уравнение системы, получаем $4y^2+2y-12=0$, откуда $y_1=\frac{3}{2}$, $y_2=-2$. Так как $y>0$, то $y_2=-2$ — посторонний корень. При $y_1=\frac{3}{2}$ из формулы $x=2y$ находим $x_1=3$.

Ответ. $\left(3;\frac{3}{2}\right)$. ▲

Задача 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}4^x\cdot 2^y=32,\\ 3\cdot 3^{8x}=27^y.\end{cases}$$

Δ Так как $4 = 2^2$, $27 = 3^3$, то по свойствам степени систему можно записать так:

$$\begin{cases} 2^{2x+y} = 2^5, \\ 3^{8x+1} = 3^{3y}, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 8x + 1 = 3y. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x = 1$, $y = 3$.

О т в е т. (1; 3). ▲

Упражнения

Решить систему уравнений (**460–470**).

460. 1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 3x + 2y = 16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 5x - 2y = 1. \end{cases}$

461. 1) $\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 7; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 200, \\ x + y = 20; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -6; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ x - y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 3y = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = -3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - 2y = -7, \\ xy = -6; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6. \end{cases}$

462. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ y - x = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 46, \\ xy = 10; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} (x - y)^2 = 4, \\ x + y = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 + y = 7, \\ x^2y = 12. \end{cases}$

463. 1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^3 + y^3 = 35; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 19. \end{cases}$

464. 1) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 2, \\ x - 10y = 900; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{y} = 4, \\ xy = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2, \\ x^2 y - 2y + 9 = 0. \end{cases}$

465. 1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ x - y = 16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1, \\ x - y = 5. \end{cases}$

---

466. 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 152, \\ x^2 - xy + y^2 = 19; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2y + x = 1, \\ 2xy^2 + x^2 y = -3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 2x^2 y - xy^2 = 15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy(x+y) = 6, \\ x^3 + y^3 = 9. \end{cases}$

467. 1) $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 16, \\ 3x^2 - 2xy - y^2 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 + 2xy - 15x^2 = 0, \\ x^2 + 2xy + 2y^2 = 25. \end{cases}$

468. 1) $\begin{cases} x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}} = 7, \\ x + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 6, \\ xy = 16. \end{cases}$

469. 1) $\begin{cases} \lg^2 x + \lg^2 y = 5, \\ \lg x - \lg y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1. \end{cases}$

470. 1) $\begin{cases} 4^x \cdot 2^y = 32, \\ 3^{8x+1} = 3^{3y}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x \cdot 9^y = 27, \\ \lg(2x+y)^2 - \lg x = 2\lg 3. \end{cases}$

§ 21. Способ сложения

Задача 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6. \end{cases} \qquad (1)$$

Δ Прибавим к первому уравнению второе, умноженное на 2, а второе уравнение оставим без изменений:

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=25, \\ xy=6. \end{cases} \qquad (2)$$

Докажем, что системы (1) и (2) равносильны.

Пусть $(x;\ y)$ — решение системы (1), т.е. оба равенства (1) верны. Тогда по свойствам верных числовых равенств верны оба равенства (2), т.е. $(x;\ y)$ — решение системы (2).

Пусть, наоборот, $(x;\ y)$ — решение системы (2), т.е. верны оба равенства (2). Прибавим к первому из них второе, умноженное на (-2). Получим верные равенства (1), т.е. $(x;\ y)$ — решение системы (1).

Решим систему (2). Первое уравнение системы (2) запишем так: $(x+y)^2=25$, откуда $x+y=\pm5$, т.е. или $y=5-x$, или $y=-5-x$.

1) Подставляя $y=5-x$ во второе уравнение системы (2), получаем $x(5-x)=6$, откуда $x^2-5x+6=0$, $x_1=3$, $x_2=2$. По формуле $y=5-x$ находим $y_1=2$, $y_2=3$.

2) Подставляя $y=-5-x$ во второе уравнение системы (2), получаем $x(-5-x)=6$, откуда $x^2+5x+6=0$, $x_3=-3$, $y_3=-2$ и $x_4=-2$, $y_4=-3$.

О т в е т. $(3;\ 2)$, $(2;\ 3)$, $(-3;\ -2)$, $(-2;\ -3)$. ▲

Приведенные при решении задачи 1 рассуждения обосновывают следующее свойство систем двух уравнений с двумя неизвестными.

Если к одному из уравнений данной системы прибавить другое, умноженное на число, не равное нулю, и составить систему из полученного уравнения и любого из уравнений данной системы, то получится система, равносильная данной.

Аналогично доказывается и следующее свойство таких систем.

Если каждое из уравнений данной системы умножить на не равное нулю число (оба уравнения на одно и то же число или на разные числа), то получится система, равносильная данной.

Заметим, что вместо слов «умножить обе части уравнения на число» кратко говорится: «умножить уравнение на число». Так же вместо слов «сложить левые и правые части уравнения» кратко говорится: «сложить уравнения».

З а д а ч а 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=2, \\ 2x^2-3xy+4y^2=3. \end{cases} \qquad (3)$$

Δ Умножив первое уравнение на 3, а второе на (-2), получим

$$\begin{cases} 3x^2-6xy+9y^2=6, \\ -4x^2+6xy-8y^2=-6. \end{cases} \qquad (4)$$

Складывая уравнения системы (4), получаем

$$x^2 - y^2 = 0,$$

откуда $y = x$ или $y = -x$.

1) Подставляя $y = x$ в первое уравнение системы (3) (можно в любое из уравнений систем (3) и (4)), имеем:

$$x^2 - 2x^2 + 3x^2 = 2,$$

откуда $x^2 = 1$, $x_1 = y_1 = 1$, $x_2 = y_2 = -1$.

2) Подставляя $y = -x$ в первое уравнение системы (3), получаем

$$x^2 + 2x^2 + 3x^2 = 2,$$

откуда $x^2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

О т в е т. (1; 1), (−1; −1), $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. ▲

З а д а ч а 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - xy - y = -7, \\ x + 2xy - y = 5. \end{cases}$$

Δ Для того чтобы исключить из этих уравнений произведение xy, прибавим ко второму уравнению первое, умноженное на 2. Получим $3x - 3y = -9$, откуда

$$x - y = -3,\ y = x + 3.$$

Подставляя это выражение y через x в первое уравнение системы, имеем

$$x - x(x + 3) - (x + 3) = -7,$$

откуда $x^2 + 3x - 4 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -4$. По формуле $y = x + 3$ находим $y_1 = 4$, $y_2 = -1$.

О т в е т. (1; 4), (−4; −1). ▲

З а д а ч а 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + 2y = 3, \\ 2x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 6y = 8. \end{cases}$$

Δ Вычтем из первого уравнения второе, получим

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = -5.$$

Это уравнение можно преобразовать так:

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0, \quad (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0,$$

откуда $x = -1$, $y = 2$. Проверка показывает, что (−1; 2) — решение системы.

О т в е т. (−1; 2). ▲

З а д а ч а 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x + 2^{x+y+1} = 5, \\ 3^{x+1} - 2^{x+y} = 1. \end{cases}$$

Δ Применяя свойство степени, запишем данную систему так:

$$\begin{cases} 3^x + 2 \cdot 2^{x+y} = 5, \\ 3 \cdot 3^x - 2^{x+y} = 1. \end{cases}$$

Прибавляя к первому уравнению второе, умноженное на 2, получаем $7 \cdot 3^x = 7$, откуда $x = 0$. Подставляя $x = 0$ в первое уравнение исходной системы, получаем $1 + 2^{y+1} = 5$, откуда $y = 1$.

О т в е т. (0; 1). ▲

З а д а ч а 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x-1} - 3\sqrt{3-y} = 0, \\ 3\sqrt{2x-1} - 2\sqrt{3-y} = x. \end{cases}$$

Δ Умножим первое уравнение на (-2), а второе на 3 и сложим полученные уравнения:

$$\begin{array}{r} -4\sqrt{2x-1} + 6\sqrt{3-y} = 0 \\ + \quad 9\sqrt{2x-1} - 6\sqrt{3-y} = 3x \\ \hline 5\sqrt{2x-1} \qquad = \qquad 3x \end{array}$$

Решаем последнее уравнение: $25(2x - 1) = 9x^2$, $9x^2 - 50x + 25 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{5}{9}$.

Подставляя $x_1 = 5$ в первое уравнение исходной системы, находим $2 \cdot 3 - 3\sqrt{3-y} = 0$, $\sqrt{3-y} = 2$, $y_1 = -1$.

Подставляя $x_2 = \frac{5}{9}$ в первое уравнение исходной системы, находим: $2\sqrt{\frac{10}{9} - 1} - 3\sqrt{3-y} = 0$, $\sqrt{3-y} = \frac{2}{9}$, $3 - y = \frac{4}{81}$, $y_2 = 2\frac{77}{81}$.

Проверка показывает, что обе найденные пары являются решениями исходной системы.

О т в е т. $(5; -1)$, $\left(\frac{5}{9}; 2\frac{77}{81}\right)$. ▲

З а д а ч а 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 5, \\ \log_4 x + \log_2 y = 1. \end{cases}$$

Оба уравнения системы имеют смысл, если $x > 0$, $y > 0$. При этих значениях x, y, используя формулу перехода к логарифмам по основанию 4, получаем $\log_2 x = \dfrac{\log_4 x}{\log_4 2} = 2\log_4 x$, $\log_2 y = \dfrac{\log_4 y}{\log_4 2} == 2\log_4 y$. Поэтому система уравнений такова:

$$\begin{cases} 2\log_4 x + \log_4 y = 5, \\ \log_4 x + 2\log_4 y = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Вычитая из первого уравнения этой системы второе, умноженное на 2, находим $-3\log_4 y = 3$, $\log_4 y = -1$, $y = 4^{-1} = \dfrac{1}{4}$.

Вычитая из второго уравнения системы (5) первое, умноженное на 2, находим $-3\log_4 x = -9$, $\log_4 x = 3$, $x = 4^3 = 64$.

Проверку можно не делать, так как найденные значения x, y положительны.

О т в е т. $\left(64; \dfrac{1}{4}\right)$. ▲

Упражнения

Решить систему уравнений (471–479).

471. 1) $\begin{cases} 3x + 5y = 10, \\ 2x - 7y = 14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 6y = 6, \\ 3x + 8y = 15. \end{cases}$

472. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6. \end{cases}$

473. 1) $\begin{cases} x + xy + y = -1, \\ x - xy + y = 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - y + 2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - xy - y = -7, \\ x + xy - y = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y = 11, \\ xy = 5. \end{cases}$

---

474. 1) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 54, \\ 4y^2 + xy = 115; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 3y^2 = 17, \\ 2x^2 - 7xy + 4y^2 = 26; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0, \\ 3x^2+2xy+y^2=9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+xy-6y^2=0, \\ y^2+x^2=5. \end{cases}$

475. 1) $\begin{cases} 7x^2-19xy-3y^2=3, \\ 2x^2-6xy+y^2=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y-xy=1, \\ x^2+y^2-xy=3. \end{cases}$

476*. 1) $\begin{cases} 4x^2+3xy+4y=2, \\ 3x^2+3xy-y^2-2y+4x=15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x^2-xy+6x+y^2=1, \\ 4x^2-xy-4x+2y=27. \end{cases}$

477*. 1) $\begin{cases} 2\cdot 3^x+3\cdot 2^y=\dfrac{11}{4}, \\ 3^x-2^y=\dfrac{3}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x-2^{2y}=77, \\ 3^{\frac{x}{2}}-2^y=7. \end{cases}$

478*. 1) $\begin{cases} \sqrt{x+1}-2\sqrt{2-y}=0, \\ \sqrt{x+1}+3\sqrt{2-y}=2{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2\sqrt{x}+3\sqrt{1-y}=3{,}5, \\ 3\sqrt{x}-2\sqrt{1-y}=2. \end{cases}$

479*. 1) $\begin{cases} \lg(x+y)-\lg 5=\lg(xy)-\lg 6, \\ \lg(y+6)-(\lg y+\lg 6)+\lg x=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \log_3 x+\log_9 y=2, \\ \log_9 x-\log_3 y=1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_9 x^2+\log_3(x-y)=1, \\ \log_2 y=\log_4(xy-2); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3\log_5 x-\log_5 y=10, \\ \log_5 x+3\log_5 y=5. \end{cases}$

§ 22. Решение систем уравнений различными способами

Задача 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=-10. \end{cases} \qquad (1)$$

Δ Эту систему можно решить, например, способом подстановки. Однако вы знаете, что если x и y таковы, что равенства (1) верны, то по теореме, обратной теореме Виета, x и y являются корнями уравнения $z^2-3z-10=0$. Решая это уравнение, находим его корни: $z_1=5$, $z_2=-2$. По теореме Виета найденные числа 5 и -2 — удовлетворяют системе (1). При этом x может равняться 5, тогда $y=-2$, или $x=-2$, $y=5$.

Ответ: $(5; -2)$, $(-2; 5)$. ▲

З а д а ч а 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{3}, \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{8}{9}. \end{cases}$$

Δ Для краткости записи введем новые неизвестные: $u=\dfrac{1}{x}$, $v=\dfrac{1}{y}$. Получим

$$\begin{cases} u+v=\dfrac{4}{3}, \\ u^2-v^2=\dfrac{8}{9}. \end{cases}$$

Решая эту систему, например, способом подстановки, находим $u=1$, $v=\dfrac{1}{3}$. А так как $x=\dfrac{1}{u}$, $y=\dfrac{1}{v}$, то $x=1$, $y=3$.

О т в е т. (1; 3). ▲

Приведем еще примеры, когда для краткости записи полезно ввести новые неизвестные.

З а д а ч а 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x-y+xy=1, \\ x^2+y^2+xy=3. \end{cases} \qquad (2)$$

Δ Введем новые неизвестные: $x-y=u$, $xy=v$. Заметим, что при этом

$$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=u^2+2v.$$

Поэтому систему (2) можно записать так:

$$\begin{cases} u+v=1, \\ u^2+3v=3. \end{cases}$$

Решая эту систему, например, способом подстановки, находим

$$u_1=0,\ v_1=1,\ u_2=3,\ v_2=-2.$$

Возвращаясь к старым неизвестным, получаем две системы:

$$1)\ \begin{cases} x-y=0, \\ xy=1; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x-y=3, \\ xy=-2. \end{cases}$$

Из первой системы находим $x_1=1$, $y_1=1$; $x_2=-1$, $y_2=-1$, а из второй системы находим $x_3=2$, $y_3=-1$; $x_4=1$, $y_4=-2$.

О т в е т. (1; 1), (−1; −1), (2; −1), (1; −2). ▲

З а д а ч а 4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 4^x + 9^y - 7 \cdot 2^x - 5 \cdot 3^y + 18 = 0, \\ 2^x - 3^y = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Δ Введем новые неизвестные: $2^x = u$, $3^y = v$. Так как $4^x = (2^x)^2 = u^2$, $9^y = (3^y)^2 = v^2$, то в новых неизвестных система (3) такова:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 - 7u - 5v + 18 = 0, \\ u - v = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Решим эту систему способом подстановки. Из второго уравнения имеем $v = u - 1$. Подставляя это значение v в первое уравнение системы (4), получаем

$$u^2 + (u - 1)^2 - 7u - 5(u - 1) + 18 = 0,$$

откуда

$$u^2 + u^2 - 2u + 1 - 7u - 5u + 5 + 18 = 0,$$

$$2u^2 - 14u + 24 = 0,$$

$$u^2 - 7u + 12 = 0,$$

$$u_1 = 4,\ u_2 = 3.$$

По формуле $v = u - 1$ находим $v_1 = 3$, $v_2 = 2$.

Возвращаясь к старым неизвестным, получаем две системы:

$$1)\ \begin{cases} 2^x = 4, \\ 3^y = 3; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 2^x = 3, \\ 3^y = 2. \end{cases}$$

Из первой системы находим $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, а из второй системы: $x_2 = \log_2 3$, $y_2 = \log_3 2$.

О т в е т. $(2; 1)$, $(\log_2 3; \log_3 2)$. $\blacktriangle$

Рассмотрим примеры, когда при решении системы полезно перемножить или поделить ее уравнения, т.е. перемножить или поделить ее левые и правые части.

З а д а ч а 5. Найти действительные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} xy + 24 = \dfrac{x^3}{y}, \\ xy - 6 = \dfrac{y^3}{x}. \end{cases} \tag{5}$$

Δ Перемножая уравнения (5), получаем

$$(xy + 24)(xy - 6) = x^2y^2,$$

откуда

$$x^2y^2 + 18xy - 144 = x^2y^2,$$

$$xy = 8. \tag{6}$$

Подставляя (6) в систему уравнений (5), получаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} = 32, \\ \dfrac{y^3}{x} = 2. \end{cases} \tag{7}$$

Умножая первое уравнение системы (7) на уравнение (6), получаем $x^4 = 8 \cdot 32 = 4^4$. Так как требуется найти только действительные решения, то $x_{1,2} = \pm 4$. Из уравнения (6) находим $y_{1,2} = \pm 2$.

Решение системы (5) нельзя считать законченным, так как был использован новый для вас прием — умножение уравнений системы. Следует убедиться в том, что, по крайней мере, уравнения (6) и (7) являются следствиями системы (5). Покажем это.

Пусть $(x; y)$ — решение системы (5), т.е. оба равенства (5) верные. Заметим, что тогда $x \neq 0$ и $y \neq 0$ (на нуль делить нельзя!). Из равенств (5) получены верные равенства (6), (7) и $x_1 = 4$, $y_1 = 2$ и $x_2 = -4$, $y_2 = -2$. Обратный переход от этих пар чисел $(x; y)$ к равенствам (7), (6) и, наконец, к (5) в общем виде трудно доказать. В таких случаях проще сделать проверку. Подставляя каждую из найденных пар чисел в оба уравнения (5), получаем верные числовые равенства.

О т в е т. (4; 2), (−4; −2). ▲

З а д а ч а 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 6, \\ yz = 3, \\ zx = 2. \end{cases} \tag{8}$$

Δ Перемножая все три уравнения, находим $x^2 y^2 z^2 = 36$, откуда $xyz = \pm 6$.

1) Пусть

$$xyz = 6. \tag{9}$$

Подставляя поочередно в равенство (9) каждое из уравнений (8), находим $x_1 = 2, y_1 = 3, z_1 = 1$.

2) Если $xyz = -6$, то аналогично находим $x_2 = -2, y_2 = -3, z_2 = -1$.

Проверкой убеждаемся, что обе тройки чисел являются решениями системы (8).

О т в е т. (2; 3; 1), (−2; −3; −1). ▲

З а д а ч а 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x \cdot 4^y = 1728, \\ 2^x \cdot 9^y = 5832. \end{cases}$$

Δ Разложим правые части уравнений системы на множители: $1728 = 64 \cdot 27 = 2^6 \cdot 3^3$, $5832 = 729 \cdot 8 = 27^2 \cdot 2^3 = 3^6 \cdot 2^3$. Исходная система такова:

$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^{2y} = 2^6 \cdot 3^3, \\ 2^x \cdot 3^{2y} = 3^6 \cdot 2^3. \end{cases} \qquad (10)$$

Умножив и разделив уравнения этой системы, получим систему

$$\begin{cases} 6^{x+2y} = 6^9, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x-2y} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}. \end{cases} \qquad (11)$$

Заметим, что если $(x;\ y)$ — решение системы (10), т.е. оба равенства (10) верные, то левые и правые их части не равны нулю. Поэтому верны равенства (11), т.е. $(x;\ y)$ — решение системы (11). В этом случае систему (11) называют *следствием* системы (10).

Отметим также, что уравнения системы (10) получаются умножением и делением уравнений (11), т.е. система (10) является следствием системы (11). Поэтому эти системы равносильны.

Теперь отметим, что в системе (11) равенство $6^{x+2y} = 6^9$ по свойствам степени является верным только тогда, когда $x + 2y = 9$, так как $6 > 0$, $6 \neq 1$. Аналогично второе равенство (11) верно только при $x - 2y = -3$. Следовательно, система (11) равносильна системе

$$\begin{cases} x + 2y = 9, \\ x - 2y = -3. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x = 3$, $y = 3$.

О т в е т. (3; 3). ▲

З а д а ч а 8. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = -1. \end{cases} \qquad (12)$$

Δ Заметим, что если $(x;\ y)$ — решение этой системы, то $x \neq 0$, так как при $x = 0$ из первого уравнения системы получается, что $y = 0$, но при $x = 0$, $y = 0$ второе уравнение системы не является верным равенством.

Разделив обе части первого уравнения системы (12) на x^2, получаем

$$2 - \frac{y}{x} - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0,$$

т.е.

$$3\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}-2=0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно $\frac{y}{x}$, получаем $\frac{y}{x}=\frac{2}{3}$ или $\frac{y}{x}=-1$, т.е. $y=\frac{2}{3}x$ или $y=-x$.

1) Подставляя $y=\frac{2}{3}x$ во второе уравнение системы (12), получаем

$$x^2-3x\left(\frac{2}{3}x\right)+2\left(\frac{2}{3}x\right)^2=-1,$$

откуда

$$x^2\left(1-2+\frac{8}{9}\right)=-1,$$

$$-\frac{1}{9}x^2=-1,$$

$$x^2=9,$$

$$x_1=3,\ x_2=-3.$$

По формуле $y=\frac{2}{3}x$ находим $y_1=2$, $y_2=-2$.

2) Подставляя $y=-x$ во второе уравнение системы (12), получаем

$$x^2+3x^2+2x^2=-1,$$

т.е.

$$6x^2=-1.$$

Это уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. (3; 2), (−3; −2). ▲

Задача 9. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=3, \\ 2x^2-2xy-y^2=-6. \end{cases} \tag{13}$$

Δ Заметим, что если $(x;\ y)$ — решение этой системы, то левые и правые части системы не равны нулю. Поэтому уравнения (13) можно разделить.

Разделим второе уравнение на первое:

$$\frac{2x^2-2xy-y^2}{x^2-3xy+2y^2}=-2. \tag{14}$$

Теперь отметим, что если $(x; y)$ — решение системы (13), то $x \neq 0$, так как если $x = 0$, то из первого уравнения (13) получается $y^2 = \frac{3}{2}$, а из второго — $y^2 = 6$. Поэтому числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части уравнения (14), можно разделить на x^2:

$$\frac{2-2\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-3\frac{y}{x}+2\left(\frac{y}{x}\right)^2}=-2,$$

откуда

$$2-2\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2=-2+6\frac{y}{x}-4\left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

$$3\left(\frac{y}{x}\right)^2-8\frac{y}{x}+4=0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно $\frac{y}{x}$, получаем $\frac{y}{x} = 2$ или $\frac{y}{x}=\frac{2}{3}$, т.е. $y = 2x$ или $y = \frac{2}{3}x$.

1) Подставляя $y = 2x$ в первое уравнение (13) (можно во второе — получится то же самое), имеем

$$x^2 - 3x(2x) + 2(2x)^2 = 3,$$

откуда

$$x^2(1 - 6 + 8) = 3,$$

$$x^2 = 1,\ x_1 = 1,\ x_2 = -1.$$

По формуле $y = 2x$ находим $y_1 = 2$, $y_2 = -2$.

2) Подставляя $y = \frac{2}{3}x$ в первое уравнение системы (13), получаем

$$x^2-3x\left(\frac{2}{3}x\right)+2\left(\frac{2}{3}x\right)^2=3,$$

откуда

$$x^2\left(1-2+\frac{8}{9}\right)=3,$$

$$-\frac{1}{9}x^2=3.$$

Это уравнение не имеет действительных корней.

О т в е т. (1; 2), (−1; −2). ▲

Системы уравнений настолько разнообразны, что практически невозможно дать какие-либо общие рекомендации по способам их решения. В каждом конкретном случае нужно использовать свой опыт решения систем, желательно находя наиболее простой способ их решения. Поэтому при решении полезно накапливать такой опыт.

Приведем еще несколько примеров решения разнообразных систем уравнения (без подробных объяснений).

Задача 10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x - 2\cdot 6^x \cdot 2^y + 6\cdot 12^y = 0, \\ 2\cdot 3^y + 4\cdot 6^y \cdot 2^x - 12^x = 0. \end{cases}$$

Δ Используя свойства степени, запишем данную систему уравнений так:

$$\begin{cases} 3^x(1-2\cdot 2^{x+y}) = -6\cdot 12^y, \\ 2\cdot 3^y(1+2\cdot 2^{x+y}) = 12^x. \end{cases}$$

Умножая уравнения этой системы, получаем

$$2\cdot 3^{x+y}(1-4\cdot 4^{x+y}) = -6\cdot 3^{x+y}\cdot 4^{x+y},$$

откуда

$$1-4\cdot 4^{x+y} = -3\cdot 4^{x+y},$$

$$4^{x+y} = 1,$$

$$x+y=0,$$

$$y=-x.$$

Подставляя $y=-x$ в первое уравнение исходной системы, получаем

$$3^x - 2\cdot 6^x\cdot 2^{-x} - 6\cdot 12^{-x} = 0,$$

откуда

$$3^x - 2\cdot 3^x\cdot 2^{-x} - 6\cdot 12^{-x} = 0,$$

$$3^x = 6\cdot 12^{-x},$$

$$3^x\cdot 12^x = 6,$$

$$36^x = 6 = 36^{\frac{1}{2}},$$

$x = \frac{1}{2}$. Поэтому $y=-x=-\frac{1}{2}$.

Ответ. $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. ▲

Задача 11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10(y-x) - x^4 = 9, \\ \sqrt{y} + \sqrt{y-2x} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Δ Запишем второе уравнение системы в виде $\sqrt{y-2x}=\sqrt{2}-\sqrt{y}$, и возведем обе части данного уравнения в квадрат:

$$y-2x=2-2\sqrt{2y}+y,$$

откуда $\sqrt{2y}=x+1$.

Возведя обе части этого уравнения в квадрат, получаем

$$y=\frac{(x+1)^2}{2}.$$

Подставим значение y в первое уравнение исходной системы

$$10\left(\frac{(x+1)^2}{2}-x\right)-x^4=9.$$

После преобразований этого уравнения имеем

$$x^4-5x^2+4=0,$$

откуда $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $x_4=-2$.

По формуле $y=\frac{(x+1)^2}{2}$ находим $y_1=2$, $y_2=0$, $y_3=\frac{9}{2}$, $y_4=\frac{1}{2}$.

Проверкой устанавливаем, что (x_1, y_1), (x_2, y_2) — решения системы, а (x_3, y_3), (x_4, y_4) — посторонние решения.

Ответ. (1; 2), (−1; 0). ▲

Задача 12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{7x+y}+\sqrt{2x+y}=5,\\ \sqrt{2x+y}+x-y=1.\end{cases}\tag{15}$$

Δ Запишем первое уравнение системы в виде $\sqrt{7x+y}=5-\sqrt{2x+y}$ и возведем обе части этого уравнения в квадрат:

$$7x+y=25-10\sqrt{2x+y}+2x+y,$$

откуда

$$10\sqrt{2x+y}=25-5x,$$

$$\sqrt{2x+y}=\frac{5-x}{2}.$$

Подставляя значение $\sqrt{2x+y}$ во второе уравнение системы (15), получаем

$$\frac{5-x}{2}+x-y=1,$$

откуда

$$x=2y-3.$$

Подставляя значение x во второе уравнение системы (15), получаем

$$\sqrt{5y-6} = 4 - y.$$

Возведя обе части этого уравнения в квадрат, получаем

$$5y - 6 = 16 - 8y + y^2,$$

откуда

$$y^2 - 13y + 22 = 0,$$

$$y_1 = 11, \quad y_2 = 2.$$

По формуле $x = 2y - 3$ находим $x_1 = 19$, $x_2 = 1$.

Проверкой устанавливаем, что (19; 11) — постороннее решение, а (1; 2) — решение системы (15).

О т в е т. (1; 2). ▲

З а д а ч а 13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = \dfrac{5}{2}, \\ xy = 27. \end{cases}$$

△ Первое уравнение системы имеет смысл только при $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$. При таких значениях x, y по формуле перехода $\log_y x = \dfrac{1}{\log_x y}$. Поэтому первое уравнение системы таково:

$$\log_x y + \frac{1}{\log_x y} = \frac{5}{2},$$

откуда

$$2(\log_x y)^2 - 5\log_x y + 2 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно $\log_x y$, находим $\log_x y = 2$ или $\log_x y = \dfrac{1}{2}$.

1) Если $\log_x y = 2$, то $y = x^2$ и второе уравнение исходной системы таково: $x^3 = 27$, откуда $x_1 = 3$, а по формуле $y = x^2$ получаем $y_1 = 9$.

2) Если $\log_x y = \dfrac{1}{2}$, то $y = \sqrt{x}$ и второе уравнение исходной системы таково: $x^{\frac{3}{2}} = 27$, откуда $x_2 = 9$, а по формуле $y = \sqrt{x}$ получаем $y_2 = 3$. ▲

О т в е т. (3; 9), (9; 3).

З а д а ч а 14*. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} 2x+(9a^2-2)y=3a, \\ x+y=1 \end{cases}$$

не имеет решений?

Δ Вычитая из первого уравнения второе, умноженное на 2, получаем

$$(9a^2-4)y=3a-2.$$

Это уравнение не имеет решений, если $9a^2-4=0$, а $3a-2\neq 0$.

Из равенства $9a^2-4=0$ находим $a=\pm\frac{2}{3}$.

Из неравенства $3a-2\neq 0$ находим $a\neq\frac{2}{3}$.

Следовательно, система не имеет решений при $a=-\frac{2}{3}$. ▲

Упражнения

Решить систему уравнений (**480–495**).

480. 1) $\begin{cases} x+y=4, \\ xy=3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=3{,}5, \\ xy=1{,}5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy=6, \\ x+y=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3xy=-1, \\ 3x+3y=2. \end{cases}$

481. 1) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3, \\ \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2, \\ \frac{2}{x^2}+\frac{3}{y^2}=21. \end{cases}$

482. 1) $\begin{cases} x-y+xy=2, \\ x^2+y^2-xy=8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy+x+y=5, \\ x^2+y^2+xy=7. \end{cases}$

483. 1) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ 5^{x+y}=25; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-3y=2, \\ 2^{2x-y}=0{,}5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-y=2, \\ 3^{x^2+y}=\frac{1}{9}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x+y=3, \\ 2^{x-2y}=16. \end{cases}$

484. 1) $\begin{cases} 5^x + 2^y = 7, \\ 5^x \cdot 2^y = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x + 4^y = 7, \\ 3^x \cdot 4^y = 12. \end{cases}$

485. 1) $\begin{cases} \log_2 (x^2 + y^2) = 7, \\ \log_2 x + 2\log_4 y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 7, \\ \log_4 (x + y) = 2. \end{cases}$

---

486. 1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 + y - x = 4, \\ 3x^2 - y + 2x = -1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy = 12, \\ \dfrac{x + y}{x - y} = 3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} (x-1)(y-1) = 3, \\ (x+2)(y+2) = 24; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ 4 + xy = 0; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} xy(x+y) = 84, \\ xy + x + y = 19; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{4}, \\ \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{15}{16}; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} xy(x-y) = 6, \\ xy + x - y = 5. \end{cases}$

487*. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = x + y, \\ x^4 + y^4 = \dfrac{1}{2}(x+y)^2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2(1 + y + y^2 + y^3) = 160, \\ x^2(1 - y + y^2 - y^3) = -80; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17(x+y)^2, \\ xy = 2(x+y); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x(y^2+1)}{x^2+y^2} = \dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{y(x^2-1)}{x^2+y^2} = \dfrac{4}{5}. \end{cases}$

488. 1) $\begin{cases} 9^x + 4^y - 2^y - 7 \cdot 3^x + 10 = 0, \\ 3^x - 2^y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x - 2^y = 2, \\ 2^{2y+1} - 3^{2x} + 3^x + 2^{y+2} = 4. \end{cases}$

489. 1) $\begin{cases} 5^x - 5^y = 100, \\ 5^{x-1} + 5^{y-1} = 30; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^{y^2 - 15y + 56} = 1, \\ y - x = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2^x - 9 \cdot 3^y = 7, \\ 2^x \cdot 3^y = \dfrac{8}{9}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^{x^2 - 4x + 3} = 1, \\ y + 2x = 7. \end{cases}$

490. 1) $\begin{cases} 64^{2x}+64^{2y}=12, \\ 64^{x+y}=4\sqrt{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{x}+2^{x+y+1}=19, \\ 3^{x+1}-2^{x+y}=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_2 x+\log_4 \dfrac{1}{y}=4, \\ xy=2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=\dfrac{5}{2}, \\ x^2y=16. \end{cases}$

491*. 1) $\begin{cases} \sqrt{2x-1}+\sqrt{3-y}=3, \\ 6x+y-2xy=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^4+19=20(x+y), \\ \sqrt{x}+\sqrt{x+2y}=\sqrt{2}. \end{cases}$

492*. 1) $\begin{cases} \sqrt{8y-x}+x=2, \\ \sqrt{3y-x}+x+y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{x+y}=6, \\ \sqrt{x+y}-y+x=2. \end{cases}$

493*. 1) $\begin{cases} 5(\log_y x+\log_x y)=26, \\ xy=64; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \log_x y-2\log_y x=1, \\ x^2+2y^2=3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3(\log_y x+\log_x y)=10, \\ xy=81; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=\dfrac{5}{2}, \\ x^2+y^2=20. \end{cases}$

494*. $\begin{cases} x^{2\log_x y}=4x+3, \\ \log_x y^2=\log_y (xy). \end{cases}$

495*. $\begin{cases} \log^2_{\frac{3}{2}}(x+y)+\log^2_{\frac{3}{2}}(x-y)-\log^2_{\frac{3}{2}}(2x)=1, \\ \log_{\frac{2}{3}}(x+y)\cdot\log_{\frac{2}{3}}(x-y)-\log_{\frac{2}{3}}(2x)=0. \end{cases}$

496. Найти все действительные значения a, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2-y^2=1, \\ y=ax+b \end{cases}$ имеет действительные решения при любом действительном значении b.

497. Найти все значения a, при которых не имеет решений система уравнений

$$\begin{cases} ax+3y=a^2+1, \\ (3a+14)x+(a+8)y=5a^2+5. \end{cases}$$

§ 23. Решение задач с помощью систем уравнений

Решение многих задач сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными. Рассмотрим примеры.

Задача 1. Пассажирский и товарный поезда одновременно отправились от двух станций навстречу друг другу. Расстояние между станциями, равное 120 км, пассажирский поезд прошел на 1 ч быстрее товарного. С какой скоростью двигались поезда, если они встретились через 1 ч 12 мин после начала движения? (Предполагается, что каждый поезд двигался с постоянной скоростью.)

Δ Обозначим скорости движения пассажирского и товарного поездов соответственно x и y (в км/ч). Тогда расстояние 120 км они прошли соответственно за $\frac{120}{x}$ и $\frac{120}{y}$ ч. По условию $\frac{120}{y} - \frac{120}{x} = 1$.

За время движения до встречи, равное 1 ч 12 мин $= \frac{6}{5}$ ч, пассажирский и товарный поезда прошли соответственно $\frac{6}{5}x$ и $\frac{6}{5}y$ км, а вместе — расстояние 120 км, т.е.

$$\frac{6}{5}x + \frac{6}{5}y = 120.$$

Таким образом, получилась система уравнений

$$\begin{cases} \frac{120}{y} - \frac{120}{x} = 1, \\ \frac{6}{5}x + \frac{6}{5}y = 120. \end{cases}$$

Решим эту систему. Первое уравнение умножим на xy (по смыслу задачи $xy \neq 0$), а второе — на $\frac{5}{6}$:

$$\begin{cases} 120x - 120y = xy, \\ x + y = 100. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим y через x

$$y = 100 - x$$

и подставим в первое уравнение. Получим

$$120x - 120(100 - x) = x(100 - x).$$

Упростим это уравнение:

$$120x - 12\,000 + 120x = 100x - x^2,$$

$$x^2 + 140x - 12\,000 = 0.$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$x = -70 \pm \sqrt{4900+12000} = -70 \pm 130,$$
$$x_1 = 60,\ x_2 = -200.$$

По смыслу задачи скорость положительна; следовательно, $x = 60$. Подставляя это значение в формулу $y = 100 - x$, находим $y = 100 - 60 = 40$.

Ответ. 60 км/ч, 40 км/ч. ▲

Задача 2. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, а его площадь 24 см^2. Найти его катеты.

Δ Пусть катеты равны x и y сантиметров. Используя теорему Пифагора и формулу площади прямоугольного треугольника, запишем условие в виде

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ \frac{1}{2}xy = 24. \end{cases}$$

Решим эту систему. Из второго уравнения выразим y через x:

$$y = \frac{48}{x}$$

и подставим в первое уравнение. Получим

$$x^2 + \frac{48}{x^2} = 100.$$

Упростим это уравнение:

$$x^4 + 2304 = 100x^2,$$
$$x^4 - 100x^2 + 2304 = 0.$$

Решая полученное биквадратное уравнение, находим:

$$x^2 = 50 \pm \sqrt{2500-2304} = 50 \pm 14,$$
$$x^2 = 64 \text{ или } x^2 = 36.$$

Так как по смыслу задачи $x > 0$, то выбираем только положительные корни: $x_1 = 8$, $x_2 = 6$. Подставляя эти значения в выражение для y, т.е. в формулу (1), находим $y_1 = 6$, $y_2 = 8$. В обоих случаях один катет равен 8 см, другой — 6 см.

Ответ. 8 см, 6 см. ▲

Задача 3. Бассейн наполняется с помощью двух труб за 7,5 ч, причем первая труба, работая одна, наполняет на 8 ч быстрее, чем вторая. За сколько часов первая труба может наполнить бассейн?

Δ Пусть первая труба заполняет бассейн за x, а вторая за y часов. Примем вместимость бассейна за единицу. Тогда за 1 ч первая труба заполняет $\frac{1}{x}$ часть бассейна, а вторая — $\frac{1}{y}$, а вместе обе трубы за 1 ч заполняют $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ часть бассейна.

По условию первая труба заполняет бассейн на 8 ч быстрее, отсюда

$$y = x + 8,$$

а обе трубы заполняют за 1 ч $\frac{1}{7{,}5} = \frac{2}{15}$ бассейна. Следовательно,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{15}.$$

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} y = x + 8, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{15}. \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} y = x + 8, \\ 15(x + y) = 2xy, \end{cases}$$

$$15(2x + 8) = 2x(x + 8),$$

$$30x + 120 = 2x^2 + 16x,$$

$$2x^2 - 14x - 120 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{49 + 240}), \quad x_1 = 12, \quad x_2 = -5.$$

По смыслу задачи $x > 0$.

Ответ. 12 ч. ▲

Задача 4. Теплоход прошел расстояние между двумя пристанями за 7 ч, а обратно за 9 ч. Найти расстояние между пристанями и собственную скорость теплохода, если скорость течения реки 2 км/ч.

Δ Пусть x километров — искомое расстояние, y километров в час — собственная скорость теплохода. По условию:

$$\begin{cases} \frac{x}{y + 2} = 7, \\ \frac{x}{y - 2} = 9. \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений. Разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{y - 2}{y + 2} = \frac{7}{9},$$

откуда $9y - 18 = 7y + 14$, $2y = 32$, $y = 16$.

Подставляя $y = 16$ в первое уравнение системы, находим $\frac{x}{16+2}=7$, $x = 126$.

Ответ. 126 км, 16 км/ч. ▲

Задача 5*. Бак объемом 425 м^3 из двух кранов был наполнен водой, причем первый кран был открыт дольше второго на 5 ч. Если бы первый кран был открыт столько же времени, сколько второй, а второй кран был бы открыт столько же времени, сколько первый, то из первого крана вытекло бы в 2 раза меньше воды, чем из второго. Если одновременно открыть оба крана, то бак наполнится за 17 ч. Сколько времени был открыт второй кран?

Δ Пусть x часов — искомое время, на которое был открыт второй кран, v кубических метров в час — скорость поступления воды из первого крана, w кубических метров в час — скорость поступления воды из второго крана.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} v(x+5)+wx=425, \\ 2vx=w(x+5), \\ (v+w)\cdot 17=425. \end{cases} \qquad (1)$$

Решая эту систему, нужно найти только x.

Второе и третье уравнения системы (1) можно представить так:

$$\begin{cases} 2vx-w(x+5)=0, \\ v+w=25. \end{cases} \qquad (2)$$

Из этой системы выразим v и w через x, т.е. решим систему (2) относительно v и w.

Сначала прибавим к первому уравнению системы (2) второе, умноженное на $(x + 5)$:

$$\begin{array}{r} 2vx - w(x+5) = 0, \\ + \underline{\; v(x+5) + w(x+5) = 25(x+5) \;} \\ v(3x+5) \;\; = 25(x+5) \end{array},$$

откуда $v=\frac{25(x+5)}{3x+5}$.

Затем прибавим к первому уравнению системы (2) второе, умноженное на $(-2x)$:

$$\begin{array}{r} 2vx - w(x+5) = 0, \\ + \underline{\; -2vx - w2x = -50x \;} \\ -w(3x+5) = -50x \end{array},$$

отсюда $w=\frac{50x}{3x+5}$.

Подставляя найденные значения v и w в первое уравнение системы (1), имеем

$$\frac{25(x+5)^2}{3x+5}+\frac{50x^2}{3x+5}=425.$$

После преобразований этого уравнения получим

$$3x^2-41x-60=0,$$

откуда $x_1=15$, $x_2=-\frac{4}{3}$.

Так как по смыслу задачи $x>0$, то $x=15$.

Ответ. 15 ч. ▲

Упражнения

498. При делении двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 6, а в остатке 4. При делении этого же числа на произведение его цифр в частном получается 2, а в остатке 16. Найти это число.

499. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 4, а в остатке 12. Если же это число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 1, а в остатке 20. Найти это число.

500. Из пункта A в пункт B отправился автомобиль, а навстречу ему из пункта B одновременно отправился автобус. Автомобиль прибыл в B, а автобус — в A спустя соответственно 40 мин и 1,5 ч после их встречи. Найти скорости автомобиля и автобуса, если расстояние между пунктами A и B равно 100 км (скорости автомобиля и автобуса постоянны).

501. Две машинистки, работая вместе, могут перепечатать рукопись за 6 ч. Одна машинистка, работая отдельно, может перепечатать ее на 5 ч быстрее, чем другая. За сколько часов может перепечатать рукопись каждая из них, работая в отдельности?

502. Двое рабочих в течение 45 мин выполняли одну работу, затем первый из них ушел, а второй закончил работу за 2,25 ч. Сколько времени понадобилось бы каждому рабочему в отдельности на выполнение всей работы, если первый мог бы ее выполнить на час раньше?

503. Катер прошел расстояние между поселками за 4 ч и вернулся обратно за 6 ч. Каково расстояние между пристанями, если скорость катера в стоячей воде составляет 20 км/ч?

504. Расстояние от A до B по течению реки теплоход проходит в 1,5 раза быстрее, чем катер, причем за каждый час катер отстает от теплохода на 8 км. Против течения реки путь от B до A теплоход проходит в 2 раза быстрее катера. Найти их скорости в стоячей воде.

505. От пристани A одновременно направились вниз по течению реки катер и плот. Катер, пройдя 96 км, повернул обратно, встретил плот на обратном пути в 24 км от A и вернулся в A, затратив на весь путь (туда и обратно) 14 ч. Найти скорость катера в стоячей воде и скорость течения реки.

506. Комплект журналов может полностью заполнить 13 стандартных полок. В продаже были полки, на каждую из которых помещалось на 2 журнала меньше, чем на стандартную. Поэтому пришлось купить 17 полок, и при этом осталось свободное место для двух журналов. Сколько журналов было в комплекте?

507. Бригада рабочих строит мост за 14 дней. Если бы в бригаде было на 4 человека больше и каждый работал бы на один час в день дольше, то та же работа была бы выполнена за 10 дней. При увеличении же бригады еще на 6 человек и рабочего дня еще на один час вся работа была бы выполнена за 7 дней. Сколько человек было в бригаде и сколько часов в день они работали?

508*. Бассейн наполняется водой из двух кранов. Сначала был открыт только первый кран на $\frac{1}{3}$ того времени, которое потребовалось бы для наполнения бассейна лишь вторым краном. Затем был открыт только второй кран на $\frac{1}{3}$ того времени, которое потребовалось бы для наполнения бассейна лишь первым краном. В результате оказалось наполненным $\frac{13}{18}$ бассейна. За какое время каждый кран в отдельности наполнит его, если оба крана наполняют бассейн за 3 ч 36 мин?

509*. Один вкладчик положил в банк некоторую сумму денег, другой — вдвое большую сумму. Сумма первого вкладчика через m лет составила p руб., а второго через n лет (где $n \neq m$) — q руб. Определить, какова первоначальная сумма денег первого вкладчика и сколько процентов в год выплачивает банк.

Упражнения к главе V

510. Выяснить, какая из данных пар чисел (1; 3), (1; $\sqrt{3}$), (−1; −$\sqrt{3}$) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^2y^2 = 3. \end{cases}$$

511. Выяснить, какая из двух систем уравнений

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = 3x - 3y \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = 3 \end{cases}$$

является следствием другой.

512. Выяснить, являются ли равносильными следующие системы уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 + 2y = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 - 2x + 2 = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ x^2 - 4y^2 = 15 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ x - 2y = 3. \end{cases}$

Решить систему уравнений (**513—516**).

513. 1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 3x + 2y = -4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 5x - y = 24; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y = -1, \\ x^2 - y^2 = -5; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$

514. 1) $\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 3x + 2y = 11; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ 4x + 3y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ xy = 4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8. \end{cases}$

515. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{8}, \\ x + y = 12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{12}, \\ x + y = 10. \end{cases}$

516. 1) $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 3^y \cdot 5^x = 45; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - x = 9, \\ \lg x - \lg y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = 29, \\ \lg x + \lg y = 2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = \log_2 12, \\ \log_2 (x+y) = 3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = \log_3 63, \\ \log_2 (x-y) = 1. \end{cases}$

517. 1) Среднее арифметическое двух чисел 25, а их среднее геометрическое равно 15. Найти эти числа.

2) Найти двузначное число, которое в 3 раза больше суммы его цифр и в $\frac{27}{14}$ больше произведения его цифр.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = 12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = \log_2 6, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{9}{14}, \\ x + y = 9. \end{cases}$

2. Разность двух чисел в 24 раза меньше их произведения, а сумма этих чисел в 5 раз больше их разности. Найти эти числа.

518. Выяснить графически, сколько решений имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - y = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y - \sqrt{x} = 1, \\ xy = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_2 x = y - 1, \\ (0{,}3)^x = y; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - y = 2x - 1, \\ y - \log_{\frac{1}{2}} (x-1) = 0. \end{cases}$

Решить систему уравнений (519–531).

519. 1) $\begin{cases} x+y=4, \\ x^2-xy+y^2=52; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=1-xy, \\ x+y=-2. \end{cases}$

520. 1) $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=74, \\ 2x^2+2xy+y^2=73; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x^2-x+y^2=4, \\ 8x^2-xy+2y^2=8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=29, \\ 7x^2-8xy+7y^2=43; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=3, \\ 2x^2-2xy-y^2=-6. \end{cases}$

521. 1) $\begin{cases} (x-1)(y-1)=-8, \\ (x+2)(y+2)=7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{1}{xy}-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{2}, \\ x^2y+xy^2=2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y+xy=11, \\ x^2y+xy^2=30; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=6, \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{15}{2}. \end{cases}$

522. 1) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21, \\ y^2-2xy+15=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2y^2-4xy+3x^2=17, \\ y^2-x^2=16. \end{cases}$

523. 1) $\begin{cases} x^3-y^3=9, \\ xy=-2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^4+y^4=17, \\ xy=2. \end{cases}$

524. 1) $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30, \\ x^2y+xy^2=468; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5, \\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=7. \end{cases}$

525*. 1) $\begin{cases} \sqrt[4]{3x-2y+9}+\sqrt[4]{2x+y-6}=3, \\ \sqrt{3x-2y+9}-\sqrt{2x+y-6=3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{x+y}=6, \\ \sqrt{x+y}-y+x=2. \end{cases}$

526. 1) $\begin{cases} 3\cdot 5^x-2\cdot 3^y=21, \\ 5^x\cdot 3^y=675; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x+7\cdot 2^y=2, \\ 3\cdot 2^{y+1}-5x=93. \end{cases}$

527. 1) $\begin{cases} 2^x\cdot 3^{-y}=1152, \\ \log_{\sqrt{5}}(x+y)=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x\cdot 9^y=27, \\ \lg(2x+y^2)-\lg x=\lg 3. \end{cases}$

528. 1) $\begin{cases} \lg^2 x+\lg^2 y=5, \\ \lg x-\lg y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_3 x+\log_3 y=2+\log_3 2, \\ \log_3(x+y)=2. \end{cases}$

529. 1) $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=1+2\lg 2, \\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=\lg 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_9 x^2+\log_3(x-y)=1, \\ \log_2 y=\log_4(xy-2). \end{cases}$

530*. 1) $\begin{cases} \log_2\left(\dfrac{x}{y}-2\right)-\log_2 y=2\log_4(y+1), \\ 5+\log_2\dfrac{x}{y}=\dfrac{14}{\log_2\dfrac{x}{y}}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2+\log_{\sqrt{3}}(2x)=\log_3 y^2, \\ 2\log_3\left(9+\dfrac{y}{x}\right)-\log_3 x^2=2\log_3(x+2). \end{cases}$

531. 1) $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)}=50, \\ \lg(x-y)+\lg(x+y)=2-\lg 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \left(8\sqrt{2}\right)^{x-y}=0{,}5^{6y-3}, \\ \log_3(x-2y)+\log_3(3x+2y)=3. \end{cases}$

532. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу, первый — из пункта A, второй — из пункта B. До места их встречи первый прошел на 1 км больше, чем второй. Первый пешеход прибыл в пункт B через 45 мин после их встречи, а второй — в пункт A через 1 ч 20 мин. Найти расстояние от A до B.

533*. Два спортсмена бегают по замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна, и на пробег всей дорожки один тратит на 5 с меньше другого. Если они стартуют одновременно и в одном направлении, то окажутся рядом через 30 с. Через какое время они встретятся, если побегут одновременно с общей линии старта в противоположных направлениях?

534*. Бассейн наполняется тремя насосами за 3 ч, причем первый насос вдвое производительнее второго. Если бассейн сначала наполнить на 0,5 объема первым и третьим насосами, а затем 0,5 объема вторым и третьим, то он наполнится за 5 ч. За какое время наполнится бассейн, если будет работать только третий насос?

535*. Имеются два сплава, состоящие из железа, никеля и хрома. Процентное содержание хрома в первом в 5 раз больше, чем никеля во втором сплаве. Кусок первого сплава массой 200 г сплавили с куском второго сплава массой 400 г и получили сплав, содержащий $q\%$ никеля. Сколько граммов железа содержит новый сплав, если первый сплав содержит 30% никеля, а второй — 40% железа?

Историческая справка

Еще со времен вавилонян и древних индусов считается, что одной из основных целей алгебры является решение уравнений и их систем.

В Древнем Вавилоне более 4000 лет назад умели решать уравнения первой, второй и некоторые уравнения третьей степени. Однако общей теории решения уравнений в те времена еще не было.

Приведем задачу, найденную в папирусе Кахуна (XVIII—XVI вв. до н.э.). Задача сформулирована в современных обозначениях и сводится по существу к решению системы уравнений: «Найти числа x и y, для которых $x^2 + y^2 = 100$ и $x : y = 1 : \frac{3}{4}$». В папирусе задача решена методом «ложного положения». «Положим $x = 1$, тогда $y = \frac{3}{4}$ и $x^2 + y^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$. Но в условии $x^2 + y^2 = 10^2$, значит, в качестве x нужно брать не 1, а $10 : \frac{5}{4} = 8$. Тогда $y = 6$».

В древности уравнениям придавалась геометрическая форма. Сегодня напоминание о «геометрической алгебре» встречается, например, в терминах «квадрат числа», «куб числа» и др. (2^2 мы читаем как *«два в квадрате»*, 2^3 — как *«два в кубе»*, уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ называем *«квадратным»* и т.д.).

Известно, что впервые правила преобразований уравнений, обосновав их, правда, геометрически, разработал выдающийся узбекский ученый первой половины IX в. *аль-Хорезми*. В XII в. труды аль-Хорезми были переведены на латинский язык и долгое время в Европе являлись основным руководством по алгебре. Арабское название операции «восполнение» («перенесение отрицательных членов уравнения в другую часть») звучало как «ал-джебр», что и дало название разделу математики, занимающемуся решением уравнений, — «алгебра».

Начало освобождения алгебры от геометрической формы в III в. связывают с именем древнегреческого ученого *Диофанта*. Однако лишь после того, как французский математик *Ф. Виет* (1540—1603) ввел буквенные обозначения для неизвестных и известных величин, и после появления трудов *Р. Декарта* (1596—1650) и других европейских ученых XVI—XVII вв. процесс освобождения алгебры от геометрической терминологии был завершен. Этот процесс способствовал расцвету алгебры и развитию различных ее направлений: теориям уравнений, многочленов, функций и пр.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

§ 24. Радианная мера угла

Пусть вертикальная прямая касается в точке P окружности с центром O радиуса 1 (рис. 42). Будем считать эту прямую числовой осью с началом в точке P, а положительным направлением на прямой — направление вверх. За единицу длины на числовой оси возьмем радиус окружности. Отметим на прямой несколько точек: ± 1, $\pm\frac{\pi}{2}$, ± 3, $\pm\pi$.

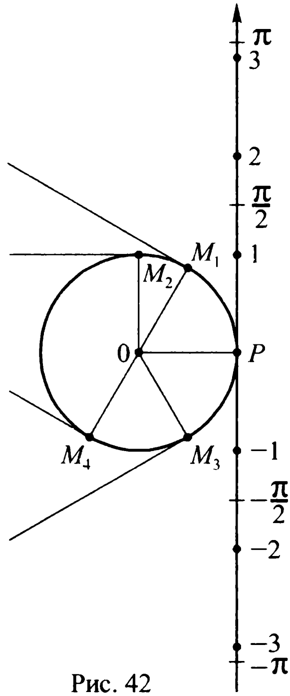


Рис. 42

Напомним, что число π — отношение длины окружности к диаметру этой окружности. Число π является иррациональным, причем $\pi \approx 3{,}14$. Вообразив эту прямую в виде нерастяжимой нити, закрепленной на окружности в точке P, будет наматывать ее на окружность. При этом точки числовой прямой с координатами, например, 1, $\frac{\pi}{2}$, -1, -2 соответственно перейдут в точки окружности M_1, M_2, M_3, M_4, такие, что длина дуги PM_1 равна 1, длина дуги PM_2 равна $\frac{\pi}{2}$ и т.д. Таким образом, *каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности.*

Так как точке прямой с координатой 1 ставится в соответствие точка M_1, то естественно считать угол POM_1 единичным и мерой этого угла измерять другие углы. Например, угол POM_2 следует считать равным $\frac{\pi}{2}$, угол POM_3 — равным -1, угол POM_4 — равным -2. Такой способ измерения углов широко применяется в математике и физике. В этом случае говорят, что углы *измеряются в радианной мере*, а угол POM_1 *называют углом в 1 радиан* (1 рад). Отметим, что длина дуги окружности PM_1 равна радиусу.

Рассмотрим окружность радиуса R и отметим на ней дугу PM, длина которой R, и угол POM (рис. 43).

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется *углом в 1 радиан*.

Найдем градусную меру угла в 1 рад. Так как дуга длиной πR (полуокружность) стягивает центральный угол в 180°, то дуга длиной R стягивает угол, в π раз меньший, т.е.

$$\boxed{1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}.}$$

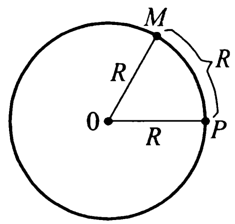


Рис. 43

Так как $\pi \approx 3{,}14$, то 1 рад $\approx 57{,}3°$.

Если угол содержит α радиан, то его градусная мера равна

$$\boxed{\alpha \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\alpha\right)^{\circ}.} \qquad (1)$$

Задача 1. Найти градусную меру угла, равного:

1) π рад; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад; 3) $\frac{3\pi}{4}$ рад.

Δ По формуле (1) находим:

1) π рад $= 180°$; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад $= 90°$; 3) $\frac{3\pi}{4}$ рад $= \left(\frac{180}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{4}\right)^{\circ} = 135°$. ▲

Найдем радианную меру угла 1°. Так как угол 180° равен π рад, то

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ рад}.$$

Если угол содержит α градусов, то его радианная мера равна:

$$\alpha° = \frac{\pi}{180}\alpha \text{ рад}. \qquad (2)$$

Задача 2. Найти радианную меру угла, равного: 1) 45°; 2) 15°.

Δ По формуле (2) находим:

1) $45° = \frac{\pi}{180}\cdot 45$ рад $= \frac{\pi}{4}$ рад;

2) $15° = \frac{\pi}{180}\cdot 15$ рад $= \frac{\pi}{12}$ рад. ▲

Приведем таблицу наиболее часто встречающихся углов в градусной и в радианной мерах:

Градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Обычно при обозначении меры угла в радианах наименование «рад» опускают.

Радианная мера угла удобна для вычисления длины дуги окружности. Так как угол в 1 рад стягивает дугу, длина которой равна радиусу R, то угол в α рад стягивает дугу длиной

$$l = \alpha R. \tag{3}$$

З а д а ч а 3. Конец минутной стрелки кремлевских курантов движется по окружности радиуса $R \approx 3{,}06$ м. Какой путь проходит конец этой стрелки за 15 мин?

Δ За 15 мин стрелка поворачивается на угол, равный $\frac{\pi}{2}$ рад. По формуле (3) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ находим

$$l = \frac{\pi}{2} R \approx \frac{3{,}14}{2} \cdot 3{,}06 \text{ м} \approx 4{,}8 \text{ м}.$$

О т в е т. 4,8 м. ▲

Особенно простой вид формула (3) имеет в случае, когда радиус окружности $R = 1$. Тогда длина дуги равна центральному углу, стягиваемому этой дугой (в радианах), т.е. $l = \alpha$. Этим объясняется удобство применения радианной меры в математике, физике, механике и т.д.

З а д а ч а 4. Доказать, что площадь кругового сектора радиуса R, образованного углом в α рад, равна

$$S = \frac{R^2}{2}\alpha, \text{ где } 0 < \alpha < \pi.$$

Δ Площадь кругового сектора в π рад (полукруга) равна $\pi\frac{R^2}{2}$. Поэтому площадь сектора в 1 рад в π раз меньше, т.е. $\pi\frac{R^2}{2} : \pi$. Следовательно, площадь сектора в α рад равна $\frac{R^2}{2}\alpha$. ▲

Упражнения

536. Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:
1) 40°; 2) 120°; 3) 105°; 4) 150°;
5) 75°; 6) 32°; 7) 100°; 8) 140°.

537. Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:
1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{9}$; 3) $\frac{2}{3}\pi$; 4) $\frac{3}{4}\pi$;
5) 2; 6) 3; 7) 1,5; 8) 0,36.

538. (*Устно.*) Определить градусную и радианную меры углов: а) равностороннего треугольника; б) равнобедренного прямоугольного треугольника; в) квадрата; г) правильного шестиугольника.

539. Вычислить радиус окружности, если дуга длиной 0,36 м стягивает центральный угол в 0,9 рад.

540. Найти радианную меру угла, стягиваемого дугой окружности длиной 3 см, если ее радиус 1,5 см.

541. Дуга кругового сектора стягивает угол в $\frac{3\pi}{4}$ рад. Найти площадь сектора, если радиус круга 1 см.

542. Радиус круга 2,5 см, а площадь кругового сектора 6,25 см^2. Найти угол, который стягивается дугой этого кругового сектора.

543. Заполнить таблицу:

Градусы	0,5°	36°	159°	108°				
Радианы					$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{3}{10}\pi$	2,5	1,8

544. Заполнить таблицу:

Угол, град.	30°					
Угол, рад		$\frac{\pi}{5}$			2	
Радиус, см	2		10	5		
Длина дуги, см		2	5			10
Площадь сектора, см^2				50	25	50

§ 25. Поворот точки вокруг начала координат

В предыдущем параграфе использовался наглядный способ установления соответствия между точками числовой прямой и точками окружности. Теперь покажем, как можно установить соответствие между действительными числами и точками окружности с помощью поворота точки окружности.

Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Ее называют *единичной окружностью*. Введем *понятие поворота точки* единичной окружности вокруг начала координат на угол α рад, где α — любое действительное число.

1. Пусть $\alpha > 0$. Предположим, что точка, двигаясь по единичной окружности от точки P против часовой стрелки, прошла путь длиной α (рис. 44). Конечную точку пути обозначим M. В этом случае будем говорить, что точка M получена из точки P поворотом вокруг начала координат на угол α рад.

2. Пусть $\alpha < 0$. В этом случае поворот на угол α рад означает, что движение совершалось по часовой стрелке и точка прошла путь длиной $|\alpha|$ (рис. 45). Поворот на 0 рад означает, что точка остается на месте.

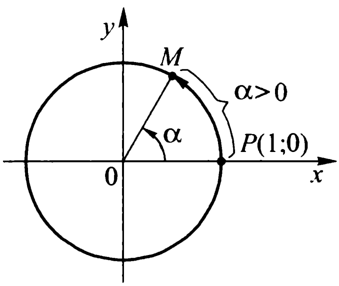


Рис. 44

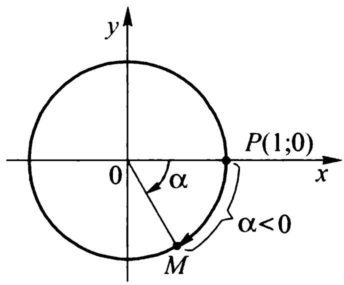


Рис. 45

Примеры

1) При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{\pi}{2}$ рад (рис. 46) получается точка M с координатами $(0; 1)$.

2) При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $-\frac{\pi}{2}$ рад (см. рис. 46) получается точка $N(0; -1)$.

3) При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{3\pi}{2}$ рад (рис. 47) получается точка $K(0; -1)$.

4) При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $-\pi$ рад (см. рис. 47) получается точка $L(-1; 0)$.

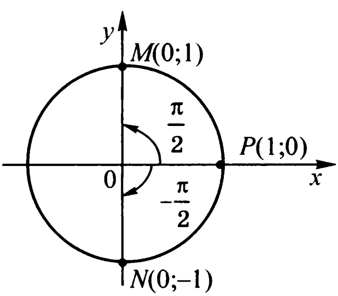


Рис. 46

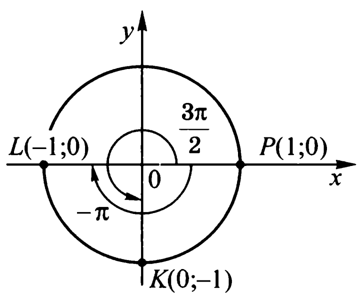


Рис. 47

В курсе геометрии рассматривались углы от $0°$ до $180°$. Используя поворот точки единичной окружности вокруг начала координат, можно рассматривать углы, большие $180°$, а также отрицательные углы. Угол поворота можно задать как в градусах, так и в радианах. Например, поворот точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{3\pi}{2}$ означает то же самое, что и поворот на $270°$; поворот на $-\frac{\pi}{2}$ — это поворот на $-90°$.

Приведем таблицу поворотов на некоторые углы, по модулю меньшие 2π, выраженные в радианной и градусной мерах (рис. 48).

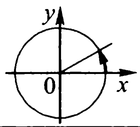
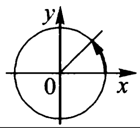
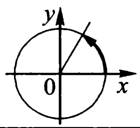
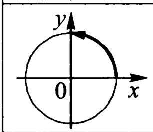
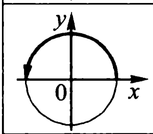
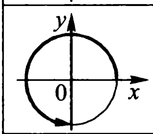
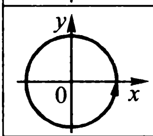
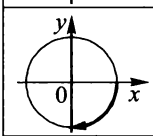
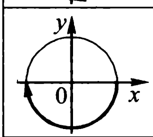
	$\frac{\pi}{6}$	$30°$
	$\frac{\pi}{4}$	$45°$
	$\frac{\pi}{3}$	$60°$
	$\frac{\pi}{2}$	$90°$
	π	$180°$
	$\frac{3}{2}\pi$	$270°$
	2π	$360°$
	$-\frac{\pi}{2}$	$-90°$
	$-\pi$	$-180°$

Рис. 48

Отметим, что при повороте точки $P(1; 0)$ на 2π, т. е. на $360°$, точка возвращается в первоначальное положение. При повороте этой точки на -2π, т. е. на $-360°$, она также возвращается в первоначальное положение.

Теперь рассмотрим примеры поворотов точки на угол, больший 2π, и на угол, меньший -2π. Так, при повороте на угол $\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота против часовой стрелки и проходит еще путь $\frac{\pi}{2}$ (рис. 49). При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2} = -2 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота по часовой стрелке и еще проходит путь $\frac{\pi}{2}$ в том же направлении (рис. 50).

Заметим, что при повороте точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{9\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 49). При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $-\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 50).

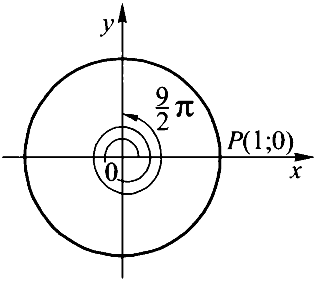


Рис. 49

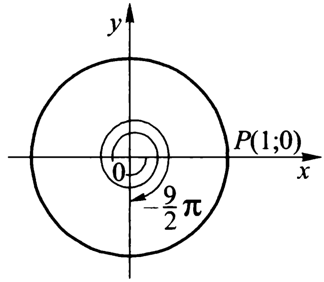


Рис. 50

Вообще если $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, где k — целое число, то при повороте на угол α получается та же самая точка, что и при повороте на угол α_0.

Итак, *каждому действительному числу* α *соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки* (1; 0) *на угол* α рад.

Однако одной и той же точке M единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha + 2\pi k$, где k — целое число, задающих поворот точки $P(1; 0)$ в точку M (рис. 51).

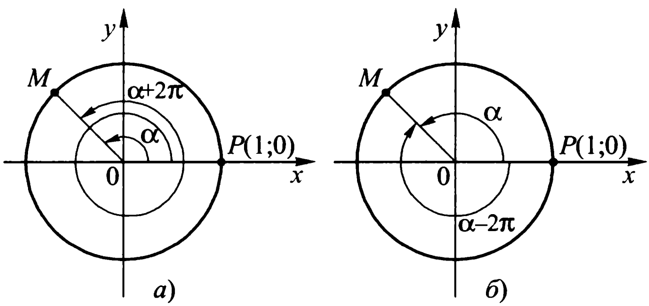


Рис. 51

Задача 1. Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на углы: 1) 7π; 2) $-\frac{5\pi}{2}$.

Δ 1) Так как $7\pi = \pi + 2\pi \cdot 3$, то при повороте на 7π получается та же самая точка, что и при повороте на π, т. е. получается точка с координатами $(-1; 0)$.

2) Так как $-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$, то при повороте на $-\frac{5\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на $-\frac{\pi}{2}$, т. е. получается точка с координатами $(0; -1)$. ▲

З а д а ч а 2. Записать все углы, на которые нужно повернуть точку (1; 0), чтобы получить точку $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

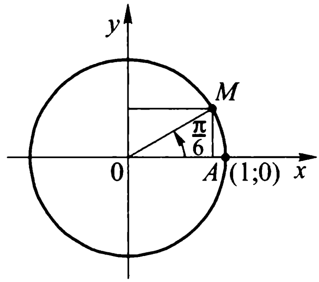


Рис. 52

Δ Из прямоугольного треугольника AOM (рис. 52) следует, что угол AOM $\frac{\pi}{6}$, т. е. один из возможных углов поворота равен $\frac{\pi}{6}$. Следовательно, все углы, на которые надо повернуть точку (1; 0), чтобы получить точку $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, выражаются так: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где k — любое целое число, т. е. $k = 0; \pm1; \pm2; \ldots$. ▲

Упражнения

545. Найти координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки (1; 0) на угол:

1) 4π; 2) $-\frac{3}{2}\pi$; 3) $3{,}5\pi$; 4) $-6{,}5\pi$;

5) $\frac{\pi}{4}$; 6) $\frac{\pi}{3}$; 7) $225°$; 8) $-45°$.

На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки (1; 0) на угол (**546–548**).

546. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $-\frac{3}{4}\pi$;

5) $\frac{4\pi}{3}$; 6) $-\frac{5}{4}\pi$; 7) $315°$; 8) $-225°$.

547. 1) $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi$; 3) $\frac{2\pi}{3} \pm 6\pi$;

2) $-\frac{\pi}{3} \pm 2\pi$; 4) $-\frac{3\pi}{4} \pm 8\pi$.

548. 1) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, k — целое число;

2) $-\frac{3}{2}\pi + 2\pi k$, k — целое число;

3) $-\pi + 2\pi k$, k — целое число;

4) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, k — целое число.

549. Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол:

1) 3π; 2) $-\frac{7}{2}\pi$; 3) $-\frac{15}{2}\pi$;

4) 5π; 5) $540°$; 6) $810°$.

550. Найти координаты точки, полученной поворотом точки $(1;\ 0)$ на угол (k — целое число):

1) $-\frac{3\pi}{2}+2\pi k$; 3) $\frac{7\pi}{2}+2\pi k$;

2) $\frac{5\pi}{2}+2\pi k$; 4) $-\frac{9\pi}{2}+2\pi k$.

551. Найти координаты точки, полученной поворотом точки $(1;\ 0)$ на угол (k — целое число):

1) $\frac{\pi}{2}\pm\pi$; 3) $-\frac{3\pi}{2}+\pi k$;

2) $\frac{\pi}{4}\pm\pi$; 4) $-\pi+\pi k$.

552. Найти все углы, на которые нужно повернуть точку $(1;\ 0)$, чтобы получить точку с координатами:

1) $(-1;\ 0)$; 2) $(1;\ 0)$; 3) $(0;\ 1)$; 4) $(0;\ -1)$.

553. Определить четверть (квадрант), в которой расположена точка, полученная поворотом точки $P(1;\ 0)$ на заданный угол:

1) 1; 2) 2,75; 3) 3,16; 4) 4,95.

---

554. Найти число x, где $0 \leqslant x < 2\pi$, и натуральное число k, такие, чтобы выполнялось равенство: $\alpha = x + 2\pi k$, если:

1) $\alpha = 6{,}7\pi$; 2) $\alpha = 9{,}8\pi$; 3) $\alpha = 4\frac{1}{2}\pi$;

4) $\alpha = 7\frac{1}{3}\pi$; 5) $\alpha = \frac{11}{2}\pi$; 6) $\alpha = \frac{17}{3}\pi$.

555. На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки $P(1;\ 0)$ на заданный угол:

1) $\frac{\pi}{4}\pm 2\pi$; 2) $-\frac{\pi}{3}\pm 2\pi$; 3) $\frac{2}{3}\pi\pm 6\pi$;

4) $-\frac{3\pi}{4}\pm 8\pi$; 5) $4{,}5\pi$; 6) $5{,}5\pi$;

7) -6π; 8) -7π.

556. Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол (k — целое число):

1) $-\frac{3\pi}{2}+2\pi k$; 3) $\frac{7\pi}{2}+2\pi k$;

2) $\frac{5\pi}{2}+2\pi k$; 4) $-\frac{9\pi}{2}+2\pi k$.

557*. Записать все углы, на которые надо повернуть точку $P(1;\ 0)$, чтобы получить точку с координатами:

1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

2) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$.

§ 26. Определение синуса, косинуса и тангенса угла

В курсе геометрии были введены синус, косинус и тангенс угла, выраженного в градусах. Этот угол рассматривался в промежутке от 0° до 180°. Синус и косинус произвольного угла определяются следующим образом (рис. 53):

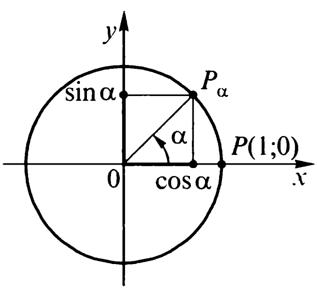


Рис. 53

Определение 1. Синусом угла α *называется ордината точки, полученной поворотом точки* $(1;\ 0)$ *вокруг начала координат на угол* α (обозначается $\sin\alpha$).

Определение 2. Косинусом угла α *называется абсцисса точки, полученной поворотом точки* $(1;\ 0)$ *вокруг начала координат на угол* α (обозначается $\cos\alpha$).

В этих определениях угол α может выражаться как в градусах, так и в радианах.

Например, при повороте точки $(1;\ 0)$ на угол $\frac{\pi}{2}$, т. е. угол 90°, получается точка $(0;\ 1)$. Ордината точки $(0;\ 1)$ равна 1, поэтому

$$\sin\frac{\pi}{2}=\sin 90^\circ=1;$$

абсцисса этой точки равна 0, поэтому

$$\cos\frac{\pi}{2}=\cos 90^\circ=0.$$

Отметим, что приведенные определения синуса и косинуса в случае, когда угол заключен в промежутке от 0° до 180°, совпадают с определениями синуса и косинуса, известными из курса геометрии.

Например:

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30° = \frac{1}{2};$$

$$\cos\pi = \cos 180° = -1.$$

Задача 1. Найти $\sin(-\pi)$ и $\cos(-\pi)$.

Δ Точка (1; 0) при повороте на угол $-\pi$ перейдет в точку (−1; 0) (рис. 54). Следовательно, $\sin(-\pi) = 0$ и $\cos(-\pi) = -1$. ▲

Задача 2. Найти $\sin 270°$ и $\cos 270°$.

Δ Точка (1; 0) при повороте на угол 270° перейдет в точку (0; −1) (рис. 55). Следовательно, $\cos 270° = 0$ и $\sin 270° = -1$. ▲

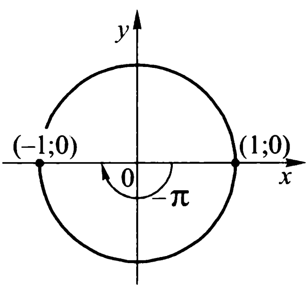


Рис. 54

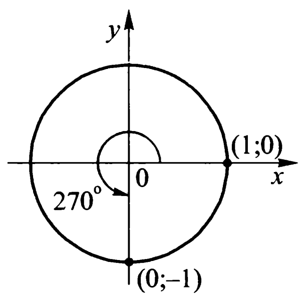


Рис. 55

Задача 3. Решить уравнение $\sin x = 0$.

Δ Решить уравнение $\sin x = 0$ — это значит найти все углы, синус которых равен нулю.

Ординату, равную нулю, имеют две точки на единичной окружности: (1; 0) и (−1; 0) (см. рис. 54). Эти точки получаются из точки (1; 0) поворотом на углы 0, π, 2π, 3π и т. д., а также на углы $-\pi$, -2π, -3π и т. п.

Следовательно, $\sin x = 0$ при $x = \pi k$, где k − любое целое число. ▲

Множество целых чисел обозначается буквой $\boldsymbol{Z}$. Для обозначения того, что число k принадлежит $\boldsymbol{Z}$, используют запись $k \in \boldsymbol{Z}$ (читается: «k принадлежит $\boldsymbol{Z}$»). Поэтому ответ к задаче 3 можно записать так:

$$x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

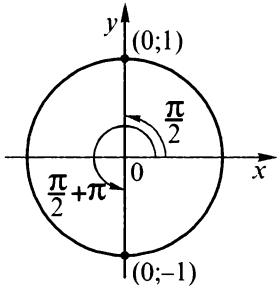


Рис. 56

З а д а ч а 4. Решить уравнение $\cos x = 0$.

Δ Абсциссу, равную нулю, имеют две точки единичной окружности: (0; 1) и (0; −1) (рис. 56). Эти точки получаются из точки (1; 0) поворотом на углы $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\pi$, $\frac{\pi}{2}+2\pi$ и т. д., а также на углы $\frac{\pi}{2}-\pi$, $\frac{\pi}{2}-2\pi$ и т.п., т.е. на углы $\frac{\pi}{2}+k\pi$, где $k \in \boldsymbol{Z}$.

О т в е т. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. $\blacktriangle$

З а д а ч а 5. Решить уравнение:

1) $\sin x = 1$; 2) $\cos x = 1$.

Δ 1) Ординату, равную единице, имеет точка (0; 1) единичной окружности. Эта точка получается из точки (1; 0) поворотом на углы $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

О т в е т. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

2) Абсциссу, равную единице, имеет точка, полученная из точки (1; 0) поворотом на углы $2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

О т в е т. $x = 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$. $\blacktriangle$

О п р е д е л е н и е 3. Тангенсом угла α *называется отношение синуса угла* α *к его косинусу* (обозначается $\operatorname{tg}\alpha$).

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Например:

$$\operatorname{tg} 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = \frac{0}{1} = 0, \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

Иногда используется *котангенс угла* α (обозначается $\operatorname{ctg}\alpha$), который определяется формулой

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Например:

$$\operatorname{ctg} 270° = \frac{\cos 270°}{\sin 270°} = \frac{0}{-1} = 0, \qquad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = 1.$$

Отметим, что $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определены для любого угла, а их значения заключены от −1 до 1; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ определен лишь для тех углов, для которых $\cos\alpha \neq 0$, т. е. для любых углов, кроме $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ определен лишь для тех углов, для которых $\sin\alpha \neq 0$, т. е. для любых углов, кроме $\alpha = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Приведем таблицу часто встречающихся значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса:

α	0 $(0°)$	$\frac{\pi}{6}$ $(30°)$	$\frac{\pi}{4}$ $(45°)$	$\frac{\pi}{3}$ $(60°)$	$\frac{\pi}{2}$ $(90°)$	π $(180°)$	$\frac{3\pi}{2}$ $(270°)$	2π $(360°)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	0	Не существует	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Не существует	0	Не существует

З а д а ч а 6. Вычислить:

$$4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

Δ Используя таблицу, получаем

$$4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 4\cdot\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 2{,}5. \quad \blacktriangle$$

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов, не вошедших в эту таблицу, можно найти по четырехзначным математическим таблицам В.М. Брадиса, а также с помощью микрокалькулятора.

З а д а ч а 7. Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\sin 25°$; 2) $\cos\frac{\pi}{5}$; 3) $\operatorname{tg} 5$.

Δ На любом микрокалькуляторе вычисления проводятся с помощью одних и тех же клавиш: $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$, $\boxed{\operatorname{tg}}$, перед которыми нужно нажимать клавишу $\boxed{F}$. Перед вычислением надо установить переключатель **Р–Г** (радиан — градус) в нужном положении:

1) 25 $\boxed{F}$ $\boxed{\sin}$ 0, 42261825.

О т в е т. 0,42.

2) $\boxed{F}$ $\boxed{\pi}$ 5 $\boxed{+}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\cos}$ 0,80901703.

Ответ: 0, 81.

3) 5 $\boxed{F}$ $\boxed{tg}$ –3,380514.

Ответ: –3,38. ▲

Упражнения

558. Изобразить на единичной окружности точку, соответствующую числу α, если:

1) $\sin\alpha = 1$;
2) $\sin\alpha = 0$;
3) $\cos\alpha = -1$;
4) $\cos\alpha = 0$;
5) $\sin\alpha = -0{,}6$;
6) $\sin\alpha = 0{,}5$;
7) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$;
8) $\cos\alpha = -0{,}25$.

559. Вычислить:

1) $\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2}$;
2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{2}$;
3) $\sin\pi - \cos\pi$;
4) $\sin 0 - \cos 2\pi$;
5) $\sin\pi + \sin 1{,}5\pi$;
6) $\sin 0 + \cos 2\pi$.

560. Найти значения синуса и косинуса числа β, если:

1) $\beta = 3\pi$;
2) $\beta = 4\pi$;
3) $\beta = 3{,}5\pi$;
4) $\beta = \frac{5}{2}\pi$;
5) $\beta = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
6) $\beta = (2k+1)\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Вычислить (561 – 562).

561. 1) $\sin 3\pi - \cos\frac{3\pi}{2}$;

2) $\cos 0 - \cos 3\pi + \cos 3{,}5\pi$;

3) $\sin\pi k + \cos 2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$;

4) $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2} - \sin\frac{(4k+1)\pi}{2}$, где $k \in \boldsymbol{Z}$.

562. 1) $\operatorname{tg}\pi + \cos\pi$;
2) $\operatorname{tg}0° - \operatorname{tg}180°$;
3) $\operatorname{tg}\pi + \sin\pi$;
4) $\cos\pi - \operatorname{tg}2\pi$.

563. Найти значение выражения:

1) $3\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

2) $5\sin\frac{\pi}{4} + 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - 5\cos\frac{\pi}{4} - 10\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;

3) $\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right):\cos\frac{\pi}{6}$;

4) $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

564. Решить уравнение:

1) $2\sin x=0$;

2) $\frac{1}{2}\cos x=0$;

3) $\cos x-1=0$;

4) $1-\sin x=0$.

565. Может ли $\sin\alpha$ или $\cos\alpha$ быть равным:

1) 0,49; 2) −0,875; 3) $-\sqrt{2}$; 4) $2-\sqrt{2}$?

---

566. Найти значение выражения при данном значении α:

1) $2\sin\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$;

2) $0{,}5\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$ при $\alpha=60°$;

3) $\sin 3\alpha-\cos 2\alpha$ при $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

4) $\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{3}$ при $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

567. Найти значение выражения:

1) $\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}$;

2) $2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$;

3) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)$;

4) $2\cos^2\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$.

568. Доказать, что

$$\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}.$$

569. Решить уравнение:

1) $\sin x=-1$;

2) $\cos x=-1$;

3) $\sin 3x=0$;

4) $\cos 0{,}5x=0$;

5) $\sin\left(\frac{x}{2}+6\pi\right)=1$;

6) $\cos(5x+4\pi)=1$.

570. Используя микрокалькулятор, проверить равенство:

1) $\sin 60^\circ \approx 0{,}866$;
3) $\cos \frac{\pi}{5} \approx 0{,}996$;
2) $\cos 45^\circ \approx 0{,}707$;
4) $\sin \frac{\pi}{13} \approx 0{,}225$.

571. Используя микрокалькулятор, вычислить с точностью до 0,01:

1) $\sin 1{,}5$;
2) $\sin 0{,}866$;
3) $\sin 3{,}53$;
4) $\sin 8{,}071$;
5) $\cos 0{,}5$;
6) $\cos 0{,}138$;
7) $\cos 4{,}81$;
8) $\cos 10{,}035$;
9) $\sin 38^\circ$;
10) $\sin 13^\circ$;
11) $\sin 51^\circ 15'$;
12) $\sin 60^\circ 20'$;
13) $\cos 12^\circ$;
14) $\cos 42^\circ$;
15) $\cos 45^\circ 12'$;
16) $\cos 30^\circ 10'$.

572. Используя микрокалькулятор, вычислить с точностью до 0,01:

1) $\sin \frac{\pi}{5}$;
2) $\cos \frac{\pi}{8}$;
3) $\cos \frac{10}{7}\pi$;
4) $\operatorname{tg} \frac{19}{9}\pi$;
5) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$;
6) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{9}$;
7) $\operatorname{tg} \frac{27}{5}\pi$;
8) $\operatorname{tg} \frac{11}{8}\pi$;
9) $\sin 368^\circ$;
10) $\cos 1025^\circ$;
11) $\operatorname{tg} 773^\circ$;
12) $\operatorname{tg} 423^\circ$.

§ 27. Знаки синуса, косинуса и тангенса угла

1. Знаки синуса и косинуса

Пусть точка (1; 0) движется по единичной окружности против часовой стрелки. Для точек, находящихся в первой четверти (квадранте), ординаты и абсциссы положительны. Поэтому $\sin \alpha > 0$ и $\cos \alpha > 0$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис. 57, 58).

Для точек, расположенных во второй четверти, ординаты положительны, а абсциссы отрицательны. Следовательно, $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (см. рис. 57, 58). Аналогично в третьей четверти $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$, а в четвертой $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$ (см. рис. 57, 58). При дальнейшем движении точки по окружности знаки синуса и косинуса определяются тем, в какой четверти окажется точка.

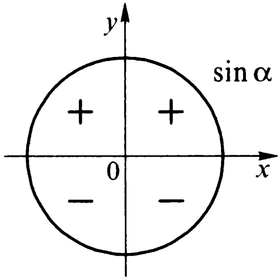


Рис. 57

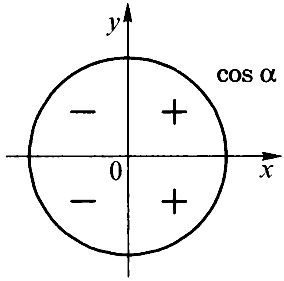


Рис. 58

Если точка (1; 0) движется по часовой стрелке, то *знаки синуса и косинуса* также *определяются тем, в какой четверти окажется точка*; это показано на рисунках 57, 58.

Задача 1. Определить знаки синуса и косинуса углов:

1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) 745°; 3) $-\frac{5\pi}{7}$.

Δ 1) Углу $\frac{3\pi}{4}$ соответствует точка единичной окружности, расположенная во второй четверти. Поэтому $\sin\frac{3\pi}{4} > 0$, $\cos\frac{3\pi}{4} < 0$.

2) Так как $745° = 2 \cdot 360° + 25°$, то повороту точки (1; 0) на угол 745° соответствует точка, расположенная в первой четверти. Поэтому $\sin 745° > 0$, $\cos 745° > 0$.

3) Так как $-\pi < -\frac{5\pi}{7} < -\frac{\pi}{2}$, то при повороте точки (1; 0) на угол $-\frac{5\pi}{7}$ получается точка третьей четверти. Поэтому $\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$. ▲

2. Знаки тангенса

По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Поэтому $\operatorname{tg}\alpha > 0$, если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют одинаковые знаки, и $\operatorname{tg}\alpha < 0$, если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют противоположные знаки. Знаки *тангенса* изображены на рисунке 59.

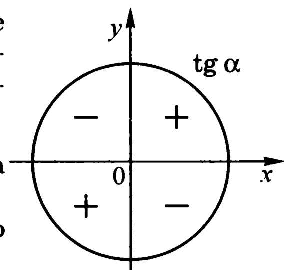


Рис. 59

Задача 2. Выяснить знак тангенса угла: 1) 260°; 2) 3.

Δ 1) Так как $180° < 260° < 270°$, то $\operatorname{tg} 260° > 0$.

2) Так как $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, то $\operatorname{tg} 3 < 0$. ▲

Упражнения

573. В какой четверти находится точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α, если:

1) $\alpha = \frac{\pi}{6}$;
2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$;
3) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$;
4) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$;
5) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$;
6) $\alpha = -\frac{7\pi}{6}$;
7) $\alpha = 3{,}5$;
8) $\alpha = 4{,}8$;
9) $\alpha = -1{,}31$;
10) $\alpha = -2{,}7$?

574. Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. В какой четверти находится точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол:

1) $\frac{\pi}{2} - \alpha$;
2) $\alpha - \pi$;
3) $\frac{3\pi}{2} - \alpha$;
4) $\frac{\pi}{2} + \alpha$;
5) $\alpha - \frac{\pi}{2}$;
6) $\pi - \alpha$?

575. Определить знак числа $\sin \alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$;
2) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$;
3) $\alpha = \frac{13}{3}\pi$;
4) $\alpha = -\frac{33\pi}{7}$;
5) $\alpha = -\frac{5}{8}\pi$;
6) $\alpha = -\frac{4}{3}\pi$;
7) $\alpha = -\frac{7}{4}\pi$;
8) $\alpha = -0{,}1\pi$;
9) $\alpha = 4$;
10) $\alpha = 5{,}1$;
11) $\alpha = -7{,}3$;
12) $\alpha = -6{,}1$;
13) $\alpha = 210°$;
14) $\alpha = -230°$;
15) $\alpha = 850°$;
16) $\alpha = -470°$.

576. Определить знак числа $\cos \alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{2}{3}\pi$;
2) $\alpha = \frac{7}{6}\pi$;
3) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$;
4) $\alpha = -\frac{2}{5}\pi$;
5) $\alpha = 2$;
6) $\alpha = 4{,}6$;
7) $\alpha = -4$;
8) $\alpha = -5{,}3$;
9) $\alpha = 290°$;
10) $\alpha = -150°$.

577. Определить знак числа $\operatorname{tg} \alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{5}{6}\pi$;
2) $\alpha = \frac{12}{5}\pi$;
3) $\alpha = -\frac{3}{5}\pi$;
4) $\alpha = -\frac{5}{4}\pi$;
5) $\alpha = 1$;
6) $\alpha = 3{,}7$;
7) $\alpha = -3{,}4$;
8) $\alpha = -1{,}3$;
9) $\alpha = 190°$;
10) $\alpha = 283°$.

578. Определить знаки чисел $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если:

1) $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$; 2) $\frac{3}{2}\pi < \alpha < \frac{7\pi}{4}$;

3) $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$; 4) $2\pi < \alpha < 2{,}5\pi$.

579. Определить знаки чисел $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если:
1) $\alpha = 1$; 2) $\alpha = 3$; 3) $\alpha = -3{,}4$; 4) $\alpha = -1{,}3$.

---

580. Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Определить знак числа:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 3) $\cos(\alpha - \pi)$;

4) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; 6) $\sin(\pi - \alpha)$.

581. Каковы знаки $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если:

1) $3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3}$; 2) $\frac{5\pi}{2} < \alpha < \frac{11\pi}{4}$?

582. Для каких значений аргумента α, заключенных в промежутке от 0 до 2π, знаки синуса и косинуса совпадают (различны)?

583. Определить знак числа:

1) $\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{4}$; 3) $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{3\pi}{4}}$;

2) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$; 4) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}$.

584. Сравнить значения выражений:
1) $\sin 0{,}7$ и $\sin 4$; 2) $\cos 1{,}3$ и $\cos 2{,}3$.

585. Решить уравнение:

1) $\sin(5\pi + x) = 1$; 3) $\cos\left(\frac{5}{2}\pi + x\right) = -1$;

2) $\cos(x + 3\pi) = 0$; 4) $\sin\left(\frac{9}{2}\pi + x\right) = -1$.

586*. В какой четверти находится точка, соответствующая числу α, если:
1) $\sin\alpha + \cos\alpha = -1{,}4$; 2) $\sin\alpha - \cos\alpha = 1{,}4$?

§ 28. Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла

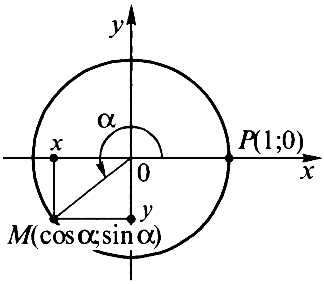


Рис. 60

Выясним *зависимость между синусом и косинусом.*

Пусть точка $M(x;\ y)$ единичной окружности получена поворотом точки (1; 0) на угол α (рис. 60). Тогда по определению синуса и косинуса

$$x = \cos\alpha, \quad y = \sin\alpha.$$

Точка M принадлежит единичной окружности, поэтому ее координаты $(x;\ y)$ удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Следовательно,

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.} \qquad (1)$$

Равенство (1) выполняется при любых значениях α и называется *основным тригонометрическим тождеством.*

Из равенства (1) можно $\sin\alpha$ выразить через $\cos\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}. \qquad (3)$$

В этих формулах знак перед корнем определяется знаком выражения, стоящего в левой части формулы.

З а д а ч а 1. Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Δ Воспользуемся формулой (2). Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\sin\alpha < 0$, поэтому в формуле (2) перед корнем надо поставить знак «минус»:

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}. \ \blacktriangle$$

З а д а ч а 2. Вычислить $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

Δ Так как $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, то $\cos\alpha > 0$, поэтому в формуле (3) перед корнем нужно поставить знак «плюс»:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \ \blacktriangle$$

Выясним теперь *зависимость между тангенсом и котангенсом*.

По определению тангенса и котангенса

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Перемножая эти равенства, получаем

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.} \qquad (4)$$

Из равенства (4) можно выразить $\operatorname{tg} \alpha$ через $\operatorname{ctg} \alpha$ и наоборот:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha},} \qquad (5)$$

$$\boxed{\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.} \qquad (6)$$

Равенства (4)—(6) справедливы при $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

З а д а ч а 3. Вычислить $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 13$.

Δ По формуле (6) находим:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{13}. \ \blacktriangle$$

З а д а ч а 4. Вычислить $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

По формуле (3) находим $\cos \alpha$. Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos \alpha < 0$. Поэтому

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - 0{,}64} = -0{,}6.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}8}{-0{,}6} = -\frac{4}{3}. \ \blacktriangle$$

Используя основное тригонометрическое тождество и определение тангенса, найдем *зависимость между тангенсом и косинусом*.

Разделим обе части равенства $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ на $\cos^2 \alpha$, предполагая, что $\cos \alpha \neq 0$.

Получим равенство

$$\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

откуда

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.} \qquad (7)$$

Эта формула верна, если $\cos \alpha \neq 0$, т. е. при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Из формулы (7) можно выразить тангенс через косинус и косинус через тангенс.

Задача 5. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Δ Из формулы (7) находим

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} - 1 = \frac{16}{9}.$$

Тангенс во второй четверти отрицателен, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$. ▲

Задача 6. Вычислить $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Δ Из формулы (7) находим

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{10}.$$

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$ и поэтому $\cos\alpha = -\sqrt{0{,}1}$. ▲

Упражнения

587. Может ли синус (косинус) принимать следующие значения:

$0{,}03$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{11}{13}$; $-\frac{13}{11}$; $\sqrt{2}$?

588. Могут ли одновременно выполняться равенства:

1) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$;

3) $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\cos\alpha = \frac{2}{3}$;

4) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{5}$ и $\cos\alpha = \frac{\sqrt{23}}{5}$;

5) $\sin\alpha = \frac{2}{7}$ и $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7}$;

6) $\sin\alpha = 0{,}2$ и $\cos\alpha = 0{,}8$?

589. Вычислить:

1) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{2}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

---

590. Вычислить значение каждой из тригонометрических функций, если:

1) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

2) $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{8}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha = -3$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

5) $\cos\alpha = 0{,}8$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

6) $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

7) $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}4$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

8) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{24}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

591. Какие значения могут принимать:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$;

2) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

3) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$;

4) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$?

592. Могут ли одновременно выполняться равенства:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ и $\cos\alpha = \frac{3}{4}$?

593. Пусть α — один из углов прямоугольного треугольника. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$.

594. Угол при вершине равнобедренного треугольника имеет тангенс, равный $2\sqrt{2}$. Найти косинус этого угла.

595. Найти $\cos\alpha$, если $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \frac{1}{8}$.

596*. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Найти значение выражения:

1) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$;

2) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$;

3) $\frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}$;

4) $\frac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$.

597*. Известно, что $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$. Найти:

1) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$;

2) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$.

598*. Решить уравнение:

1) $2\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

2) $\sin^2 x - 2 = \sin x - \cos^2 x$;

3) $2\cos^2 x - 1 = \cos x - 2\sin^2 x$;

4) $3 - \cos x = 3\cos^2 x + 3\sin^2 x$.

§ 29. Тригонометрические тождества

Задача 1. Доказать, что при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ справедливо равенство

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \qquad (1)$$

Δ По определению $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, поэтому

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Эти преобразования верны, так как $\sin \alpha \neq 0$ при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Равенство (1) справедливо для всех допустимых значений α, т.е. таких, при которых его левая и правая части имеют смысл. Такие равенства называют *тождествами*, а задачи на доказательство таких равенств называют задачами на доказательство тождеств.

Обычно при доказательстве тригонометрических тождеств или при упрощении выражений допустимые значения углов не устанавливают, если это не требуется в условии.

Задача 2. Доказать тождество

$$\cos^2 \alpha = (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha).$$

$$\Delta\ (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha. \ ▲$$

Задача 3. Доказать тождество

$$\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Δ Чтобы доказать это тождество, покажем, что разность между его левой и правой частями равна нулю:

$$\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)} = 0. \ ▲$$

При решении задач **1—3** использовались следующие *способы доказательства тождеств*: преобразование правой части к левой; преобразование левой части к правой; установление того, что разность между правой и левой частями равна нулю. Иногда удобно доказательство тождества провести преобразованием его левой и правой частей к одному и тому же выражению.

Задача 4. Доказать тождество

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha.$$

$$\Delta\ \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - \dfrac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \dfrac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$

Тождество доказано, так как его левая и правая части равны $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$. ▲

Задача 5. Упростить выражение $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$.

$$\Delta\ \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha. \ ▲$$

Упражнения

599. Доказать тождество:

1) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) = \sin^2\alpha$;

2) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha) = \cos^2\alpha$;

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$;

4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha$;

5) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \sin^2\alpha = 1$;

6) $\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} + \cos^2\alpha = 1$.

600. Упростить выражение:

1) $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha - 2\sin\alpha$;

2) $\cos\alpha - \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$;

4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$.

601. Упростить выражение и найти его числовое значение при заданном значении α:

1) $\frac{\sin^2\alpha - 1}{1-\cos^2\alpha}$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

2) $\cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + \sin^2\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

3) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$ при $\alpha = \frac{\pi}{3}$;

4) $\cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha + \sin^2\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

602. Доказать тождество:

1) $(1 - \sin^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = 1$;

2) $\sin^2\alpha(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha) - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

603. Упростить выражение:

1) $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)\cos^2 \alpha - 1$;
3) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$;

2) $1 - \sin^2 \alpha\,(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)$;
4) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}{1+\operatorname{ctg}^2 \alpha}$.

604. Доказать тождество:

1) $(1 - \cos 2\alpha)(1 + \cos 2\alpha) = \sin^2 2\alpha$;

2) $\dfrac{\sin \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} = -\dfrac{1}{1+\sin \alpha}$;

3) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$;

4) $(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^2 + 2\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$;

5) $\dfrac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha} + \dfrac{1+\cos \alpha}{\sin \alpha} = \dfrac{2}{\sin \alpha}$;

6) $\dfrac{\sin \alpha}{1-\cos \alpha} = \dfrac{1+\cos \alpha}{\sin \alpha}$;

7) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} + \dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 \alpha} = 1$;

8) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$.

605*. Найти значение выражения $\sin \alpha \cos \alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = 0{,}6$.

606. Найти значение выражения $\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha$, если $\cos \alpha - \sin \alpha = 0{,}2$.

607. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$. Найти $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

608. Решить уравнение:

1) $2\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

2) $2\sin^2 x + 3\cos^2 x - 2 = 0$;

3) $3\cos^2 x - 2\sin x = 3 - 3\sin^2 x$;

4) $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin x - 1 - 2\sin^2 x$.

§ 30. Синус, косинус, тангенс углов α и $-\alpha$

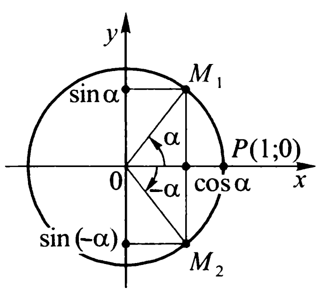


Рис. 61

Пусть точки M_1 и M_2 единичной окружности получены поворотом точки $P(1;\ 0)$ на углы α и $-\alpha$ соответственно (рис. 61). Тогда ось Ox делит угол M_1OM_2 пополам, и поэтому точки M_1 и M_2 симметричны относительно оси Ox. Абсциссы этих точек совпадают, а ординаты отличаются только знаками. Точка M_1 имеет координаты $(\cos \alpha;\ \sin \alpha)$, точка M_2 имеет координаты $(\cos(-\alpha);\ \sin(-\alpha))$. Следовательно,

$$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha.} \qquad (1)$$

Используя определение тангенса, имеем

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Таким образом,

$$\boxed{\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.} \qquad (2)$$

Формулы (1) справедливы при любых α, а формула (2) — при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Можно показать, что если $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Формулы (1) — (2) позволяют сводить вычисление значений синуса, косинуса и тангенса отрицательных углов к вычислению их значений для положительных углов.

Например: $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$;

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

Упражнения

609. Вычислить:

1) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{1+\operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$;

3) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

4) $\cos(-\pi) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

5) $\dfrac{3-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$;

6) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 3\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 7{,}5\operatorname{tg}(-\pi) + \frac{1}{8}\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$.

610. Упростить выражение:

1) $\operatorname{tg}(-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha$;

2) $\cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha\,(-\sin\alpha)$;

3) $\dfrac{\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$;

4) $\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha)+\cos^2(-\alpha)+\sin^2\alpha$.

---

611. Доказать тождество

$$\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}+\operatorname{tg}(-\alpha)\cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

612. Вычислить:

1) $\dfrac{2-\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$;

2) $\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+3\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)-2\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+4\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$.

613. Упростить:

1) $\dfrac{\sin^3(-\alpha)+\cos^3(-\alpha)}{1-\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}$; 2) $\dfrac{1-(\sin\alpha+\cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}$.

614. Доказать тождество:

1) $\cos\alpha\sin(6\pi-\alpha)\cdot(1+\operatorname{ctg}^2(-\alpha))=\operatorname{ctg}(-\alpha)$;

2) $\dfrac{1-\sin^2(-\alpha)}{\cos(4\pi-\alpha)}\cdot\dfrac{\sin(\alpha-2\pi)}{1-\cos^2(-\alpha)}=\operatorname{ctg}\alpha$.

615. Решить уравнение:

1) $\sin(-x)=1$;
2) $\cos(-2x)=0$;
3) $\cos(-2x)=1$;
4) $\sin(-2x)=0$;
5) $\cos^2(-x)+\sin(-x)=2-\sin^2 x$;
6) $1-\sin^2(-x)+\cos(4\pi-x)=\cos(x-2\pi)$.

§ 31. Формулы сложения

Формулами сложения называют формулы, выражающие $\cos(\alpha\pm\beta)$ и $\sin(\alpha\pm\beta)$ через косинусы и синусы углов α и β.

Теорема. *Для любых α и β справедливо равенство:*

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.} \qquad (1)$$

○ Пусть точки M_α, $M_{-\beta}$ и $M_{\alpha+\beta}$ получены поворотом точки $M_0(1; 0)$ на углы α, $-\beta$ и $\alpha+\beta$ радиан соответственно (рис. 62).

По определению синуса и косинуса эти точки имеют следующие координаты:

$$M_\alpha\ (\cos\alpha;\ \sin\alpha);$$

$$M_{-\beta}\ (\cos(-\beta);\ \sin(-\beta));$$

$$M_{\alpha+\beta}\ (\cos(\alpha+\beta);\ \sin(\alpha+\beta)).$$

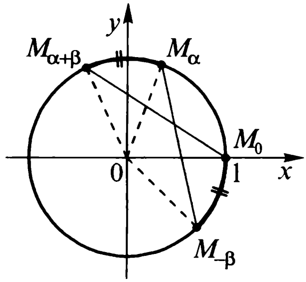


Рис. 62

Так как $\angle M_0OM_{\alpha+\beta} = \angle M_{-\beta}OM_\alpha$, то равнобедренные треугольники $M_0OM_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta}OM_\alpha$ равны и, значит, равны их основания $M_0M_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta}M_\alpha$. Следовательно,

$$(M_0M_{\alpha+\beta})^2 = (M_{-\beta}M_\alpha)^2.$$

Применяя формулу для расстояния между двумя точками, известную из курса геометрии, получаем

$$(1-\cos(\alpha+\beta))^2 + (\sin(\alpha+\beta))^2 =$$

$$= (\cos(-\beta)-\cos\alpha)^2 + (\sin(-\beta)-\sin\alpha)^2.$$

Преобразуем это равенство, используя формулы (1) из § 30:

$$1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta) =$$

$$= \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\beta\sin\alpha + \sin^2\alpha.$$

Применив основное тригонометрическое тождество, имеем

$$2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta,$$

откуда $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. ●

Задача 1. Вычислить $\cos 75°$.

Δ По формуле (1) находим

$$\cos 75° = \cos(45°+30°) = \cos 45°\cos 30° - \sin 45°\sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \ ▲$$

Заменив в формуле (1) β на $-\beta$, получим

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta),$$

откуда

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.} \qquad (2)$$

Задача 2. Вычислить $\cos 15°$.

Δ По формуле (2) находим:

$$\cos 15° = \cos(45°-30°) = \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}. \ ▲$$

Задача 3. Доказать формулы:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha. \qquad (3)$$

Δ При $\alpha=\frac{\pi}{2}$ по формуле (2) получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\beta+\sin\frac{\pi}{2}\sin\beta=\sin\beta, \text{ т. е.}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta. \qquad (4)$$

Заменив в этой формуле β на α, имеем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

Полагая в формуле (4) $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, получаем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha. \ \blacktriangle$$

Используя формулы (1)—(4), выведем *формулы сложения для синуса*:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Таким образом,

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.} \qquad (5)$$

Заменяя в формуле (5) β на $-\beta$, имеем

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta),$$

откуда

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.} \qquad (6)$$

Задача 4. Вычислить $\sin 210°$.

Δ $\sin 210° = \sin(180° + 30°) = \sin 180° \cos 30° + \cos 180° \sin 30° =$

$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}. \ \blacktriangle$$

Задача 5. Вычислить:

$$\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}.$$

$$\Delta\ \sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}=\sin\left(\frac{8\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\pi=0. \ \blacktriangle$$

З а д а ч а 6*. Доказать равенство

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (7)$$

$$\Delta\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Разделив числитель и знаменатель последней дроби на произведение $\cos\alpha\cos\beta$, получим формулу (7). ▲

Формула (7) может быть полезна при вычислениях. Например, по этой формуле находим

$$\operatorname{tg}225^\circ=\operatorname{tg}(180^\circ+45^\circ)=\frac{\operatorname{tg}180^\circ+\operatorname{tg}45^\circ}{1-\operatorname{tg}180^\circ\operatorname{tg}45^\circ}=1.$$

Упражнения

616. С помощью формул сложения вычислить:

1) $\cos 135^\circ$; 2) $\cos 120^\circ$; 3) $\cos 150^\circ$; 4) $\cos 240^\circ$.

617. Не пользуясь таблицами, вычислить:

1) $\cos 57^\circ30' \cos 27^\circ30' + \sin 57^\circ30' \sin 27^\circ30'$;

2) $\cos 19^\circ30' \cos 25^\circ30' - \sin 19^\circ30' \sin 25^\circ30'$;

3) $\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{11\pi}{9}-\sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{11\pi}{9}$;

4) $\cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$.

618. Вычислить:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

2) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

619. Упростить выражение:

1) $\cos 3\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin 3\alpha$;

2) $\cos 5\beta\cos 2\beta+\sin 5\beta\sin 2\beta$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\sin\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)$.

620. Не пользуясь таблицами, вычислить:

1) $\sin 73^\circ\cos 17^\circ+\cos 73^\circ\sin 17^\circ$;

2) $\sin 73^\circ\cos 13^\circ-\cos 73^\circ\sin 13^\circ$;

3) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$;

4) $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$.

621. Вычислить:

1) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

622. Упростить выражение:

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cos(-\beta)$;

2) $\cos(-\alpha)\sin(-\beta)-\sin(\alpha-\beta)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\sin(\alpha-\beta)$;

4) $\sin(\alpha+\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$.

---

623. Вычислить $\cos(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$ и $\sin\beta=\frac{8}{17}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

624. Вычислить $\sin(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha=-0{,}8$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и $\sin\beta=-\frac{12}{13}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

625. Вычислить $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и $\cos\beta=\frac{8}{17}$, $\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$.

626. Упростить выражение:

1) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin^2\alpha$;

3) $\cos 3\alpha+\sin\alpha\sin 2\alpha$;

4) $\cos 2\alpha-\cos\alpha\cos 3\alpha$.

627. Доказать тождество:

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$;

2) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$;

4) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}=\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{tg}\alpha$;

5) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$;

6) $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$.

628. Вычислить:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} 29^\circ + \operatorname{tg} 31^\circ}{1 - \operatorname{tg} 29^\circ \operatorname{tg} 31^\circ}$;

3) $\dfrac{1 + \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 55^\circ}{\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ}$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{16} - \operatorname{tg}\frac{3}{16}\pi}{1 + \operatorname{tg}\frac{7}{16}\pi \operatorname{tg}\frac{3}{16}\pi}$;

4) $\dfrac{1 - \operatorname{tg} 13^\circ \operatorname{tg} 17^\circ}{\operatorname{tg} 17^\circ + \operatorname{tg} 13^\circ}$.

629. Вычислить:

1) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$ и $\operatorname{tg}\beta = 2{,}4$;

2) $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$ и $\operatorname{ctg}\beta = -1$.

630. Упростить выражение

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}.$$

631. Упростить выражение:

1) $\sin\alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos\alpha$;

2) $\sin 5\beta \cos 3\beta - \sin 3\beta \cos 5\beta$.

632. Решить уравнение:

1) $\cos 6x \cos 5x + \sin 6x \sin 5x = -1$;

2) $\sin 3x \cos 5x - \sin 5x \cos 3x = -1$;

3) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos x = 1$;

4) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \sin\frac{x}{2} = 1$.

§ 32. Синус, косинус и тангенс двойного угла

Выведем *формулы синуса и косинуса двойного угла*, используя формулы сложения.

1) $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Итак,

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.} \qquad (1)$$

2) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Итак,

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.} \qquad (2)$$

З а д а ч а 1. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Δ По формуле (1) находим

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot(-0{,}6)\cdot\cos\alpha = -1{,}2\cos\alpha.$$

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$, и поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8.$$

Следовательно, $\sin 2\alpha = -1{,}2\cdot(-0{,}8) = 0{,}96$. ▲

З а д а ч а 2. Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}3$.

Δ Используя формулу (2) и основное тригонометрическое тождество, имеем

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 =$$
$$= 2\cdot(0{,}3)^2 - 1 = -0{,}82. ▲$$

З а д а ч а 3. Упростить выражение $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$.

$$Δ\ \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)} =$$
$$= \frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha. ▲$$

З а д а ч а 4. Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

Δ Полагая в формуле $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ (см. § 31) $\beta = \alpha$, получаем

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.} \qquad (3)$$

Если $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{2}$, то по формуле (3) находим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}. ▲$$

З а д а ч а 5*. Вычислить $\sin 3\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{4}$.

$$Δ\ \sin 3\alpha = \sin(\alpha+2\alpha) = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha =$$
$$= \sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \cos\alpha\, 2\sin\alpha\cos\alpha =$$

$= \sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha =$

$= 3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha).$

При $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ получаем $\sin 3\alpha = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{16}$. ▲

Упражнения

Используя формулы двойного угла, преобразовать (**633 – 634**).

633. 1) $\sin 48°$; 2) $\cos 164°$; 3) $\operatorname{tg} 92°$;

4) $\sin 45°$; 5) $\sin\frac{4\pi}{3}$; 6) $\cos\frac{5\pi}{3}$.

634. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 5) $\sin\alpha$; 6) $\cos\alpha$.

Не используя таблицы, вычислить (**635 – 637**).

635. 1) $2\sin 15° \cdot \cos 15°$; 3) $\frac{2\operatorname{tg}15°}{1-\operatorname{tg}^2 15°}$;

2) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$; 4) $(\cos 75° - \sin 75°)^2$.

636. 1) $2\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}$; 3) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$;

2) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.

637. 1) $2\sin 75° \cdot \cos 75°$; 3) $\frac{6\operatorname{tg}75°}{1-\operatorname{tg}^2 75°}$;

2) $\cos^2 75° - \sin^2 75°$; 4) $\frac{\operatorname{tg}^2 22°30' - 1}{\operatorname{tg} 22°30'}$.

638. Вычислить $\sin 2\alpha$, если:

1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 3) $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$;

2) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 4) $\sin\alpha - \cos\alpha = -\frac{1}{3}$.

639. Вычислить $\cos 2\alpha$, если:

1) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$.

640. Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$.

Упростить выражение (641–642).

641. 1) $2\cos 40^\circ \cdot \cos 50^\circ$; 3) $\sin 2\alpha + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$;

2) $2\sin 25^\circ \cdot \sin 65^\circ$; 4) $\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha$.

642. 1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}$; 2) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$.

---

643. Доказать тождество:

1) $\sin 2\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1$; 3) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$;

2) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$; 4) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 1$.

644. Вычислить $\sin 2\alpha$, если:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha - \cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$.

645. Доказать тождество:

1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha - 1$;

2) $\dfrac{\sin 2\alpha - 2\cos\alpha}{\sin\alpha - \sin^2\alpha} = -2\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\operatorname{tg}\alpha\,(1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha$;

4) $\dfrac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}\operatorname{ctg}\alpha = 1$;

5) $\dfrac{(1-2\cos^2\alpha)(2\sin^2\alpha - 1)}{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2 2\alpha$;

6) $1 - 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \sin\alpha$;

7) $\cos^3\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\cos\alpha = \dfrac{\sin 4\alpha}{4}$;

8) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos\alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

646. Доказать тождество

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\,(1+\operatorname{tg}\alpha)} = \frac{2\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha}.$$

647. Решить уравнение:

1) $\sin 2x - 2\cos x = 0$; 4) $\sin^2 x = -\cos 2x$;

2) $\cos 2x + \sin^2 x = 1$; 5) $\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2} = 0$;

3) $4\cos x = \sin 2x$; 6) $\cos^2\dfrac{x}{2} = \sin^2\dfrac{x}{2}$.

§ 33. Синус, косинус и тангенс половинного угла

По некоторым значениям $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ можно найти значения $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если известно, в какой четверти лежит угол α.

Из формулы $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ при $x = \frac{\alpha}{2}$ имеем

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Запишем основное тригонометрическое тождество в виде

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Складывая почленно равенства (2) и (1) и вычитая почленно из равенства (2) равенство (1), получаем

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \qquad (3)$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) можно представить так:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1+\cos\alpha}{2}, \qquad (5)\\ \sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1-\cos\alpha}{2}. \qquad (6)\end{aligned}}$$

Формулы (5) и (6) называют формулами синуса и косинуса половинного угла. Иногда их называют также формулами понижения степени.

Если известен $\cos\alpha$, то из формул (5) и (6) можно найти $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ с точностью до знака. Знак может быть определен, если известно, в какой четверти лежит угол $\frac{\alpha}{2}$.

Задача 1. Вычислить $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -0{,}02$ и $0 < \alpha < \pi$.

Δ По формуле (5) находим

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1-0{,}02}{2} = 0{,}49.$$

Так как $0 < \alpha < \pi$, то $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, и поэтому $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$. Следовательно, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7$. ▲

Разделив почленно равенства (6) и (5), получим формулу тангенса половинного угла:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (7)$$

З а д а ч а 2. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=0{,}8$ и $\pi<\alpha<2\pi$.

Δ По формуле (7) имеем

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-0{,}8}{1+0{,}8}=\frac{0{,}2}{1{,}8}=\frac{1}{9}.$$

По условию $\pi<\alpha<2\pi$, поэтому $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\pi$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<0$. Следовательно, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1}{9}}=-\frac{1}{3}$. ▲

З а д а ч а 3. Упростить выражение

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

Δ Используя формулы (7) и (5), получаем

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos^2\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\alpha}{2}. \text{ ▲}$$

З а д а ч а 4. Решить уравнение $1+\cos 2x=2\cos x$.

Δ Так как $1+\cos 2x=2\cos^2 x$, то данное уравнение примет вид $2\cos^2 x=2\cos x$, откуда $\cos x(\cos x-1)=0$.

1) $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$;

2) $\cos x=1$, $x=2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

Итак, исходное уравнение имеет две серии корней: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$ и $x=2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

В ответе можно записывать обе серии с одной буквой (k или n).

О т в е т. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 5. Выразить $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Δ 1) $\sin\alpha=\sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1}=\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$

$=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. Итак,

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.} \qquad (8)$$

2) $\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}} =$

$= \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. Итак,

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.} \qquad (9)$$

3) $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. Итак,

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.} \qquad (10)$$

Эту формулу можно также получить почленным делением формул (8) и (9). ▲

Итак, по формулам (8)—(10) можно находить синус, косинус и тангенс угла α, зная тангенс угла $\frac{\alpha}{2}$.

Упражнения

648. Выразить через двойной угол:

1) $\sin^2 15°$; 2) $\cos^2\frac{1}{4}$; 3) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; 4) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

649. Найти значение выражения:

1) $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sin^2 15°$;

2) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cos^2 15°$.

650. Пусть $\cos\alpha = 0{,}6$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

651. Пусть $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Вычислить:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

652. Вычислить:

1) $\sin 15°$; 2) $\cos 15°$; 3) $\operatorname{tg} 22°30'$.

653. Вычислить:

1) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=3$;

2) $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{4}$;

3) $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{3}$;

4) $\operatorname{ctg} 4\alpha$, если $\operatorname{ctg} 2\alpha=\dfrac{1}{2}$.

Упростить (654 – 655).

654. 1) $\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$;

2) $\dfrac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$;

3) $(1+\cos 2\alpha)\operatorname{tg}\alpha$;

4) $(1-\cos 2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha$.

---

655. 1) $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

2) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

3) $\dfrac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}$;

4) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$.

656. Найти:

1) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin 2\alpha=\dfrac{3}{5}$ и $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$.

2) $\sin 2\alpha$ и $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{5}{12}$ и $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

Доказать тождество (657–659).

657. 1) $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=1+\sin\alpha$;

2) $2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=1-\sin\alpha$;

3) $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)=1-\sin\alpha$;

4) $2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)=1+\sin\alpha$.

658. 1) $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$;

2) $\dfrac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

659. 1) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$;

2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

3) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$;

4) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

660*. Доказать, что если $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, то $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

661*. Упростить выражение $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha-\operatorname{tg} 2\alpha}$.

662. Решить уравнение:

1) $1 - \cos x = 2\sin\frac{x}{2}$;

2) $1 + \cos x = 2\cos\frac{x}{2}$;

3) $1 - \cos 6x = 2\sin 3x$;

4) $1 + \cos 8x = 2\cos 4x$;

5) $1 - \cos\frac{x}{2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)$;

6) $1 + \cos\frac{x}{2} = 2\sin\left(\frac{x}{4} - \frac{3\pi}{2}\right)$;

7) $2\sin^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x = 1$;

8) $2\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin 4x = 1$.

§ 34. Формулы приведения

Таблицы значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса составляются для углов от $0°$ до $90°$ (или от 0 до $\frac{\pi}{2}$). Это объясняется тем, что их значения для остальных углов сводятся к значениям для острых углов.

З а д а ч а 1. Вычислить $\sin 870°$ и $\cos 870°$.

Δ Заметим, что $870° = 2 \cdot 360° + 150°$. Следовательно, при повороте точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на $870°$ точка совершит два полных оборота и еще повернется на угол $150°$, т. е. получится та же самая точка M, что и при повороте на $150°$ (рис. 63). Поэтому $\sin 870° = \sin 150°$, $\cos 870° = \cos 150°$.

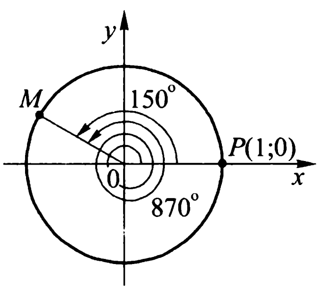


Рис. 63

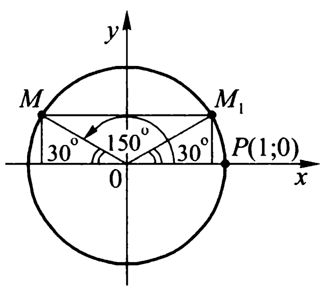


Рис. 64

Построим точку M_1, симметричную точке M относительно оси Oy (рис. 64). Ординаты точек M и M_1 одинаковы, а абсциссы отличаются только знаком. Поэтому $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

О т в е т: $\sin 870° = \frac{1}{2}$, $\cos 870° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ▲

При решении задачи 1 использовались равенства

$$\sin(2\cdot 360^\circ+150^\circ)=\sin 150^\circ,\ \ \cos(2\cdot 360^\circ+150^\circ)=\cos 150^\circ, \quad (1)$$

$$\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ,\quad \cos(180^\circ-30^\circ)=-\cos 30^\circ. \qquad (2)$$

Равенства (1) верны, так как при повороте точки $P(1;\,0)$ на угол $\alpha+2\pi k,\ \ k\in \boldsymbol{Z}$, получается та же самая точка, что и при повороте на угол α.

Следовательно, верны формулы

$$\boxed{\sin(\alpha+2\pi k)=\sin\alpha,\quad \cos(\alpha+2\pi k)=\cos\alpha,\quad k\in \boldsymbol{Z}.} \qquad (3)$$

Равенства (2) являются частными случаями формул

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha. \qquad (4)$$

Докажем формулу $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$.

○ Применяя формулу сложения для синуса, имеем

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\pi\cos\alpha-\cos\pi\sin\alpha=$$
$$=0\cdot\cos\alpha-(-1)\cdot\sin\alpha=\sin\alpha.\ \bullet$$

Аналогично доказывается и вторая из формул (4). Формулы (4) называются *формулами приведения*.

Вообще *формулами приведения для синуса* называют следующие шесть формул:

$$\boxed{\begin{gathered}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha;\\ \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\quad \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha;\\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha.\end{gathered}} \qquad (5)$$

Следующие шесть формул называют *формулами приведения для косинуса*:

$$\boxed{\begin{gathered}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha;\\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha;\\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha.\end{gathered}} \qquad (6)$$

Формулы (5) и (6) справедливы при любых значениях α.

З а д а ч а 2. Вычислить $\sin 930^\circ$.

Δ Используя из формул (3) первую, получаем

$$\sin 930^\circ=\sin(3\cdot 360^\circ-150^\circ)=\sin(-150^\circ).$$

По формуле $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ имеем

$$\sin(-150^\circ) = -\sin 150^\circ.$$

По формуле (4) находим:

$$-\sin 150^\circ = -\sin(180^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Ответ. $\sin 930^\circ = -\frac{1}{2}$. ▲

Задача 3. Вычислить $\cos\frac{15\pi}{4}$.

$$\Delta \cos\frac{15\pi}{4} = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \ ▲$$

Покажем теперь, как можно свести вычисление тангенса любого угла к вычислениям тангенса острого угла.

Отметим, что из формул (3) и определения тангенса следует равенство $\operatorname{tg}(\alpha + 2\pi k) = \operatorname{tg}\alpha$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Используя это равенство и формулы (4), получаем

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}(\alpha + \pi - 2\pi) = \operatorname{tg}(\alpha - \pi) =$$

$$= -\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = -\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Следовательно, справедлива формула

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg}\alpha, \ k \in \boldsymbol{Z}.} \qquad (7)$$

Аналогично доказывается формула

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg}\alpha, \ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (8)$$

Следующие четыре формулы называют *формулами приведения для тангенса и котангенса*:

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha, \ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha, \\ &\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha, \ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha. \end{aligned} \qquad (9)$$

Формулы (9) справедливы при всех допустимых значениях α.

Задача 4. Вычислить: 1) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{3}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4}$.

Δ 1) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

2) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. ▲

Формулы приведения для синуса и косинуса доказываются с помощью формул сложения аналогично тому, как доказана первая формула (4).

Формулы (9) можно получить из формул (5) и (6), зная, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Формулы приведения необязательно запоминать. Для того чтобы записать любую из них, можно руководствоваться следующими *правилами*:

1) В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2) Если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус заменяется на косинус, тангенс — на котангенс и наоборот. Если угол равен $\pi \pm \alpha$, то замены не происходит.

Например, покажем, как с помощью этих правил можно получить формулу приведения для $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$. По первому правилу в правой части формулы надо поставить знак «–», так как если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \alpha < \pi$, а косинус во второй четверти отрицателен. По второму правилу косинус нужно заменить на синус, следовательно, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$.

Итак, формулы (3), (7) и формулы приведения позволяют свести вычисление синуса, косинуса, тангенса и котангенса любого угла к вычислению их значений для острого угла.

Упражнения

663. Найти острый угол α, при котором выполняется равенство:

1) $\cos 75° = \cos(90° - \alpha)$;

2) $\sin 150° = \sin(90° + \alpha)$;

3) $\sin 150° = \sin(180° - \alpha)$;

4) $\cos 310° = \cos(270° + \alpha)$;

5) $\sin\frac{5}{4}\pi = \sin(\pi + \alpha)$;

6) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

7) $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$;

8) $\operatorname{ctg}\frac{11}{6}\pi = \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$.

664. Привести к углу α, где $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$:

1) $\cos 110°$; 2) $\sin 148°$; 3) $\sin \frac{5}{4}\pi$; 4) $\cos \frac{4}{3}\pi$;

5) $\operatorname{tg} 291°$; 6) $\operatorname{ctg} 305°$; 7) $\operatorname{ctg} \frac{5}{3}\pi$; 8) $\sin \frac{5}{6}\pi$;

9) $\cos \frac{41}{6}\pi$; 10) $\sin \frac{15}{7}\pi$; 11) $\operatorname{tg} \frac{8}{3}\pi$; 12) $\operatorname{ctg} \frac{28}{5}\pi$.

Используя формулы приведения, вычислить (**665–666**).

665. 1) $\cos 150°$; 2) $\sin 135°$; 3) $\operatorname{ctg} 135°$; 4) $\cos 120°$;
5) $\cos 225°$; 6) $\sin 210°$; 7) $\operatorname{ctg} 240°$; 8) $\sin 315°$.

666. 1) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$; 2) $\sin \frac{7\pi}{6}$; 3) $\cos \frac{5\pi}{3}$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3}$;

5) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; 6) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 7) $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.

Упростить (**667–668**).

667. 1) $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{tg}(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

668. 1) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin^2(\pi+\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

---

669. Привести к углу α, где $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$, и вычислить:

1) $\cos 750°$; 2) $\sin 1140°$; 3) $\operatorname{tg} 405°$; 4) $\cos 840°$;

5) $\sin \frac{47\pi}{6}$; 6) $\operatorname{tg} \frac{25\pi}{4}$; 7) $\operatorname{ctg} \frac{27\pi}{4}$; 8) $\cos \frac{21\pi}{4}$.

670. Найти числовое значение выражения:

1) $\cos 630^\circ - \sin 1470^\circ - \operatorname{ctg} 1125^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 1800^\circ - \sin 495^\circ + \cos 945^\circ$;

3) $3\cos 3660^\circ + \sin(-1560^\circ) + \cos(-450^\circ)$;

4) $\cos 4455^\circ - \cos(-945^\circ) + \operatorname{tg} 1035^\circ - \operatorname{ctg}(-1500^\circ)$.

671. Вычислить:

1) $\cos \frac{23\pi}{4} - \sin \frac{15\pi}{4} - \operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{2}\right)$;

2) $\sin \frac{25\pi}{3} - \cos\left(-\frac{17\pi}{2}\right) - \operatorname{tg} \frac{10\pi}{3}$;

3) $\sin(-7\pi) - 2\cos \frac{31\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$;

4) $\cos(-9\pi) + 2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

Доказать тождество (**672 – 673**).

672. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 0$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = 0$;

3) $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -1$;

4) $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)} = -\sin\alpha$.

673. 1) $\sin\left(\frac{7\pi}{6} + \alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$;

2) $\sin\left(\frac{5\pi}{4} + \alpha\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)$;

3) $\cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$;

4) $\cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right)$.

674. Доказать, что синус суммы двух внутренних углов треугольника равен синусу его третьего угла.

675. Решить уравнение:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$; 3) $\cos(x-\pi)=0$;

2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=1$; 4) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=1$;

5) $\sin(2x+3\pi)\sin\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)-\sin 3x\cos 2x=-1$;

6) $\sin\left(5x-\frac{3\pi}{2}\right)\cos(2x+4\pi)-\sin(5x+\pi)\sin 2x=0$.

676.** Доказать, что вычисление значений синуса, косинуса и тангенса любого угла можно свести к вычислению их значений для угла, заключенного в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

§ 35. Сумма и разность синусов, сумма и разность косинусов

При различных преобразованиях тригонометрических выражений бывает полезно представлять сумму или разность синусов и косинусов в виде произведения.

Так, для суммы синусов справедлива формула

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.} \qquad (1)$$

○ Обозначим $\frac{\alpha+\beta}{2}=x$, $\frac{\alpha-\beta}{2}=y$. Тогда $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$, и поэтому

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=$$

$$=\sin x\cos y+\cos x\sin y+\sin x\cos y-\cos x\sin y=$$

$$=2\sin x\cos y=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \bullet$$

Заменив в формуле (1) β на $(-\beta)$, имеем

$$\boxed{\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.} \qquad (2)$$

Аналогично выводится формула для суммы косинусов:

$$\cos\alpha+\cos\beta=\cos(x+y)+\cos(x-y)=$$

$$=\cos x\cos y-\sin x\sin y+\cos x\cos y+\sin x\sin y=$$

$$=2\cos x\cos y=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Итак,

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.} \qquad (3)$$

Точно так же выводится формула

$$\boxed{\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.} \qquad (4)$$

З а д а ч а 1. Вычислить $\sin 75°+\sin 15°$.

$$\Delta \sin 75°+\sin 15°=2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2}=2\sin 45°\cos 30°=$$

$$=2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}. \blacktriangle$$

З а д а ч а 2. Вычислить $\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}$.

$$\Delta \cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}=-2\sin\frac{8\pi}{12}\sin\frac{3\pi}{12}=-2\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$$

$$=-2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{6}}{2}. \blacktriangle$$

З а д а ч а 3. Доказать равенство

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

$$\Delta \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \blacktriangle$$

З а д а ч а 4. Решить уравнение $\cos 3x-\cos x=0$.

Используя формулу (4), получаем $-2\sin 2x\sin x=0$.

$$1)\ \sin 2x=0,\ 2x=\pi k,\ x=\frac{\pi k}{2},\ k\in \mathbf{Z};$$

$$2)\ \sin x=0,\ x=\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

Каждый корень из второй серии содержится среди корней первой серии, так как $\pi n=\frac{\pi k}{2}$ при $k=2n$. Поэтому в первой серии содержатся все корни исходного уравнения.

О т в е т. $x=\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. ▲

З а д а ч а 5. Преобразовать в произведение $2\sin\alpha+\sqrt{3}$.

$$\Delta\ 2\sin\alpha+\sqrt{3}=2\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right). \blacktriangle$$

Задача 6*. Доказать, что наименьшее значение выражения $\sin\alpha+\cos\alpha$ равно $-\sqrt{2}$, а наибольшее равно $\sqrt{2}$.

Δ Преобразуем данное выражение в произведение:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

Так как наименьшее значение косинуса равно -1, а наибольшее — 1, то наименьшее значение этого выражения равно $\sqrt{2}\cdot(-1)=-\sqrt{2}$, а наибольшее равно $\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$. ▲

Упражнения

677. Вычислить без таблиц:

1) $\cos 105°+\cos 75°$;
2) $\sin 105°-\sin 75°$;
3) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}$;
4) $\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}$;
5) $\operatorname{tg} 267°+\operatorname{tg} 93°$;
6) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}+\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$;
7) $\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}$;
8) $\sin 105°+\sin 165°$.

678. Упростить выражение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;
2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$;
3) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;
4) $\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

679. Доказать тождество:

1) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg} 2\alpha$;
2) $\frac{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

---

680. Упростить выражение:

1) $\frac{2(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}$; 2) $\frac{1+\sin\alpha-\cos 2\alpha-\sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}$.

681. Доказать тождество:

1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin 2\alpha=\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos\alpha+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=0$;

3) $\cos^2\alpha + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \frac{3}{2}$;

4) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha - \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$.

682. Преобразовать в произведение:

1) $1 + 2\sin\alpha$;
2) $1 - 2\sin\alpha$;
3) $1 + 2\cos\alpha$;
4) $\sqrt{3} - 2\cos\alpha$;
5) $1 + \sin\alpha$;
6) $1 - \sin\alpha$;
7) $1 + \cos\alpha + \sin\alpha$;
8) $1 - \cos\alpha - \sin\alpha$.

683. Доказать тождество:

1) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha$;

2) $\cos 2\alpha + \cos 5\alpha - \cos 3\alpha - \cos 7\alpha = -4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{7\alpha}{2}$.

684. Упростить выражение:

1) $\frac{1+\sin\alpha - \sin 3\alpha - \cos 2\alpha}{2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1}$;
2) $\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$.

685. Решить уравнение:

1) $\sin 3x + \sin x = 0$;
2) $\cos 4x + \cos x = 0$;
3) $\sin 3x = \sin x$;
4) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = 0$;
5) $\sin 5x + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = 0$;
6) $\cos(2x - \pi) - \sin\left(4x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$;
7) $\sin 3x + \sin x = 2\cos x$;
8) $\cos 5x - \cos x = 2\sin 3x$;
9) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$;
10) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

686*. Разложить на множители:

1) $1 - \cos\alpha + \sin\alpha$;
2) $1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha$;
3) $1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha$;
4) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha$.

687*. Вычислить без таблиц:

1) $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$;
2) $\cos 36^\circ + \cos 108^\circ$.

§ 36. Произведение синусов и косинусов

В ходе преобразований тригонометрических выражений бывает также полезно представлять произведение синусов и косинусов в виде суммы или разности.

Так, для произведения синуса и косинуса справедлива формула:

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\,[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)].} \qquad (1)$$

○ По формулам сложения имеем

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Складывая почленно эти равенства, получаем

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta,$$

откуда следует формула (1). ●

Аналогично доказываются формулы:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)], \qquad (2)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]. \qquad (3)$$

Задача 1. Доказать тождество:

$$4\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \sin 3\alpha.$$

Δ Применяя формулу (2), имеем

$$2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \cos 2\alpha - \cos\frac{2\pi}{3} = \cos 2\alpha + \frac{1}{2}.$$

Тогда левая часть примет вид $2\sin\alpha\cos 2\alpha + \sin\alpha$. Используя формулу (1), находим $2\sin\alpha\cos 2\alpha = \sin 3\alpha - \sin\alpha$, откуда следует, что левая часть тождества равна $\sin 3\alpha$. ▲

Задача 2. Вычислить $4\cos\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$.

Δ По формуле (3) получаем

$$4\cos\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12} = 2\left(\cos\frac{6\pi}{12} + \cos\frac{4\pi}{12}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3}\right) = 1. \ ▲$$

З а д а ч а 3. Решить уравнение

$$2\sin 2x\cos x=\sin 3x.$$

Δ По формуле (1) находим

$$\sin 3x+\sin x=\sin 3x,$$

откуда $\sin x=0$, $x=\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$. ▲

Упражнения

Представить произведение в виде суммы **(688–690)**.

688. 1) $\sin 4^\circ \sin 6^\circ$; 3) $\cos 7^\circ \cos 90^\circ$;
2) $\sin 11^\circ \sin 13^\circ$; 4) $\cos 15^\circ \cos 3^\circ$.

689. 1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$; 3) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;
2) $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$; 4) $\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

690. 1) $4\sin 10^\circ \cos 50^\circ \cos 40^\circ$; 2) $4\cos 15^\circ \sin 15^\circ \sin 100^\circ$.

691. Вычислить: $\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)$, если $\cos 2\alpha=\frac{1}{8}$.

---

692. Доказать тождество:
1) $2\sin x\sin 2x+\cos 3x=\cos x$;
2) $2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\alpha-\sin\frac{\pi}{6}$.

693. Вычислить $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

694. Вычислить $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$, если $\cos\alpha=\frac{1}{4}$.

695. Решить уравнение:
1) $2\sin 3x\sin 2x=\cos x$; 3) $\sin 2x\cos x=\sin x\cos 2x$;
2) $2\sin 3x\cos x=2\sin x\cos x$; 4) $\sin x\cos 3x=\sin 3x\cos x$.

696. Преобразовать произведение в сумму:
1) $\sin\alpha\cos 3\alpha\cos 4\alpha$; 2) $\cos 3\alpha\cos 5\alpha\cos 7\alpha$.

Упражнения к главе VI

697. Найти:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

2) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

3) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

4) $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

698. Упростить выражение:

1) $2\sin(-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - 2\cos(-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

2) $2\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + 3\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - 2$;

3) $(1+\operatorname{tg}^2(-\alpha))\left(\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2(-\alpha)}\right)$;

4) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}$.

Вычислить (699–700).

699. 1) $\sin\frac{47\pi}{6}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{25\pi}{4}$; 3) $\operatorname{ctg}\frac{27\pi}{4}$; 4) $\cos\frac{21\pi}{4}$.

700. 1) $\cos\frac{23\pi}{4} - \sin\frac{15\pi}{4}$; 3) $\cos 3660^\circ + \sin(-1560^\circ)$;

2) $\sin\frac{25\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{10\pi}{3}$; 4) $\cos(-945^\circ) + \operatorname{tg} 1035^\circ$.

Упростить выражение (701–702).

701. 1) $\left(\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha\left(\frac{1+\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right)$.

702. 1) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$; 2) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$.

703. Доказать тождество:

1) $1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

2) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

Вычислить (704–705).

704. 1) $2\sin 6\alpha \cos^2\left(\frac{\pi}{4}+3\alpha\right)-\sin 6\alpha$ при $\alpha=\frac{5\pi}{24}$;

2) $\cos 3\alpha + 2\cos(\pi-3\alpha)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-1{,}5\alpha\right)$ при $\alpha=\frac{5\pi}{36}$.

705. 1) $\frac{\sqrt{3}(\cos 75^\circ-\cos 15^\circ)}{1-2\sin^2 15^\circ}$; 2) $\frac{2\cos^2\frac{\pi}{8}-1}{1+8\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}}$.

706. Доказать тождество:

1) $\frac{2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$; 2) $\frac{2\cos 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha+\sin 4\alpha}=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

707. Показать, что:

1) $\sin 35^\circ+\sin 25^\circ=\cos 5^\circ$; 2) $\cos 12^\circ-\cos 48^\circ=\sin 18^\circ$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Вычислить $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

2. Найти значение выражения:

1) $\cos 135^\circ$; 2) $\sin\frac{8\pi}{3}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}$; 4) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{2\pi}{8}$.

3. Доказать тождество:

1) $3\cos 2\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=2\cos 2\alpha$;

2) $\frac{\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{2\cos 4\alpha}=\sin\alpha$.

4. Упростить выражение:

1) $\sin(\alpha-\beta)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$;

2) $\cos^2(\pi-\alpha)-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

3) $2\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)$.

---

708. Упростить выражение

$$\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)\cdot\frac{1-\cos 4\alpha}{\cos(\pi-\beta+\alpha)}.$$

Доказать тождество (709–710).

709. 1) $\dfrac{\sin(2\alpha-3\pi)+2\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}+2\alpha\right)}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-2\alpha\right)+\sqrt{3}\cos(2\alpha-3\pi)}=-\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,2\alpha;$

2) $\dfrac{4\sin^4(\alpha-1{,}5\pi)}{\sin^4(\alpha-2{,}5\pi)+\cos^4(\alpha+2{,}5\pi)-1}=-2\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha;$

3) $\dfrac{-2\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4(\alpha-1{,}5\pi)+\sin^4(\alpha+1{,}5\pi)-1}=\mathrm{ctg}^2\,\alpha;$

4) $\dfrac{2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-2\alpha\right)-\sqrt{3}\sin(2{,}5\pi-2\alpha)}{\cos(4{,}5\pi-2\alpha)+2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+2\alpha\right)}=\dfrac{\mathrm{tg}\,2\alpha}{\sqrt{3}}.$

710. 1) $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\mathrm{ctg}\,\alpha;$ 2) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\dfrac{\alpha}{2}}{1+\cos\alpha+\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}.$

711. Вычислить:

1) $\mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$ и $\dfrac{5\pi}{4}<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

2) $\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

712. Вычислить значение выражения $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$.

713. Вычислить значение выражения $\dfrac{4\sin 2\alpha+5\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha-3\cos 2\alpha}$, если $\mathrm{ctg}\,\alpha=\dfrac{1}{3}$.

Доказать тождество (714–715).

714. 1) $\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta);$

2) $\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha=4\sin 3\alpha\cos^2\alpha;$

3) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\mathrm{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right);$ 4) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,2\alpha}=2\,\mathrm{ctg}\,2\alpha.$

715. 1) $\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{1-\cos\alpha}=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2};$

2) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\mathrm{tg}\,3\alpha.$

716*. Найти значение выражения:

1) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$;

2) $\dfrac{\sin^2 2\alpha}{\cos^4\alpha+\sin^3\alpha\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$.

Доказать тождество (**717 – 718**).

717*. 1) $\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\sin 2\alpha}$;

2) $\sin^2\alpha+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=\dfrac{1}{4}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=1$.

718*. 1) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\dfrac{1}{8}(5+3\cos 4\alpha)$;

2) $\sin^8\alpha+\cos^8\alpha=\dfrac{1}{32}(\cos^2 4\alpha+14\cos 4\alpha+17)$;

3) $\sin 3\alpha\sin^3\alpha+\cos 3\alpha\cos^3\alpha=\cos^3 2\alpha$;

4) $\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

Историческая справка

Как и многие разделы математики, тригонометрия возникла в древние времена из потребностей людей при ведении расчетов, связанных с земельными работами (для определения расстояния до недоступных предметов, составления географических карт и пр.). Еще древнегреческие ученые создали «тригонометрию хорд», в которой выражались зависимости между центральными углами круга и хордами, на которые они опираются. Этой тригонометрией пользовался во II в. до н. э. в своих расчетах древнегреческий астроном *Гиппарх*. Во II в. н. э. греческий ученый *Птоломей* в своей работе «Алмагест» («Великая книга») вывел соотношения в круге, которые по сути своей аналогичны современным формулам синуса половинного и двойного углов, синуса суммы и разности двух углов.

Долгие годы тригонометрия служила и развивалась благодаря астрономии. В VIII в. усилиями математиков Ближнего и Среднего Востока тригонометрия выделилась из астрономии и стала самостоятельной математической дисциплиной. К этому времени хорды в тригонометрии были заменены синусами (отношениями половины хорды к радиусу круга), были введены понятия косинуса и тангенса, а также составлены таблицы значений тригонометрических функций.

Слово «синус» произошло от латинского *sinus* («перегиб»), которое, в свою очередь, происходит от арабского слова «джива» («тетива лука»). Слово «косинус» — сокращение словосочетания *complementi sinus* («синус дополнения»), объясняющего тот факт, что $\cos\alpha$ равен синусу угла, дополняющего угол α до $\frac{\pi}{2}$, т.е. $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Латинское слово *tangens* переводится как «касательная» («касательная к окружности»).

Идея введения тригонометрических понятий с помощью круга единичного радиуса получила распространение в X–XI вв.

Первый научный труд, в котором тригонометрия утвердилась как самостоятельная ветвь математики, был создан в 1462–1464 гг. немецким астрономом и математиком *И. Мюллером*, известным в истории под псевдонимом *Региомонтан* (1436–1476). После Региомонтана значительный вклад в тригонометрию внес польский астроном и математик *Н. Коперник* (1473–1543), посвятивший этой науке два раздела своего знаменитого труда «Об обращениях небесных тел» (1543). Позже, в сочинениях *И. Кеплера* (1571–1630), *Й. Бюрги* (1552–1632), *Ф. Виета* и других известных математиков, встречаются сложные преобразования тригонометрических выражений и выводятся многие формулы. Интересны, например, рекуррентные формулы, полученные Ф. Виетом:

$$\cos m\alpha = 2\cos\alpha\cos(m-1)\alpha - \cos(m-2)\alpha;$$

$$\cos m\alpha = -2\sin\alpha\sin(m-1)\alpha + \cos(m-2)\alpha;$$

$$\sin m\alpha = 2\cos\alpha\sin(m-1)\alpha - \sin(m-2)\alpha;$$

$$\sin m\alpha = 2\sin\alpha\cos(m-1)\alpha + \sin(m-2)\alpha.$$

Тригонометрическая символика с годами совершенствовалась и лишь в трудах *Л. Эйлера* в XVIII в. приобрела современный вид, удобный для решения вычислительных задач.

Следует отметить, что помимо «плоскостной» тригонометрии, изучаемой в школе, существует *сферическая тригонометрия*, являющаяся частью сферической геометрии. Сферическая тригонометрия рассматривает соотношения между сторонами и углами треугольников на сфере, образованных дугами больших кругов сферы. Исторически сферическая тригонометрия возникла из потребностей астрономии фактически раньше тригонометрии на плоскости.

ГЛАВА VII

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Об определении тригонометрических функций

Вы знаете, что каждому действительному числу x соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки $(1; 0)$ на угол x радиан. Для этого угла определены $\sin x$ и $\cos x$. Тем самым каждому действительному числу x поставлены в соответствие числа $\sin x$ и $\cos x$, т. е. на множестве $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел определены функции

$$y = \sin x \text{ и } y = \cos x.$$

Каждая из этих функций принимает значения от -1 до 1, т. е. $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

Так как $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, то тангенс числа x определен для тех x, для которых $\cos x \neq 0$, т. е. для всех действительных значений x, кроме $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает все действительные значения.

Функция $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ определена для всех действительных значений x, кроме $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и принимает все действительные значения.

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ называют *тригонометрическими*, а уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ называют *простейшими тригонометрическими уравнениями*.

Решить тригонометрическое уравнение, например уравнение $\cos x = a$, — это значит найти все его корни, т. е. найти числа x, которые обращают уравнение в верное числовое равенство, или установить, что таких чисел нет.

§ 37. Уравнение cos *x* = *a*

Рассмотрим уравнение

$$\cos x = a. \qquad (1)$$

Так как множество значений косинуса — отрезок $[-1; 1]$, то уравнение (1) имеет корни только при $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

Корни уравнения (1) при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ были найдены в § 26:

$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	(2)
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	(3)
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	(4)

Задача 1. Решить уравнение $\cos 3x = 1$.

Δ По формуле (3) имеем $3x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, откуда $x = \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. $\blacktriangle$

Задача 2. Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

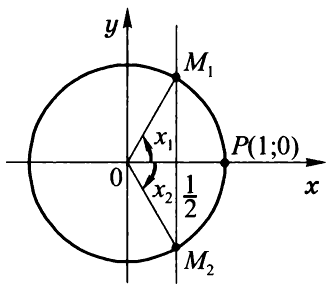


Рис. 65

Δ Напомним, что $\cos x$ — абсцисса точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол x радиан. Абсциссу, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рис. 65). Так как $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, то точка M_1 получается из точки $P(1; 0)$ поворотом на угол $x_1 = \frac{\pi}{3}$, а также на углы $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm1, \pm2, \ldots$. Точка M_2 получается из точки $P(1; 0)$ поворотом на угол $x_2 = -\frac{\pi}{3}$, а также на углы $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm1, \pm2, \ldots$. Итак, все корни уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ можно найти по формулам $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Вместо двух этих формул обычно пользуются одной:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \ \blacktriangle$$

Задача 3. Решить уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.

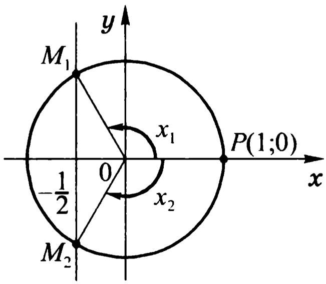


Рис. 66

Δ Абсциссу, равную $-\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2, симметричные относительно оси абсцисс (рис. 66). Так как $-\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$, то $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = -\frac{2\pi}{3}$. Следовательно, все корни уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ можно найти по формуле $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. ▲

Таким образом, каждое из уравнений $\cos x = \frac{1}{2}$ и $\cos x = -\frac{1}{2}$ имеет бесконечное множество корней.

На отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ — корень уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ и $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ — корень уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$. Число $\frac{\pi}{3}$ называют *арккосинусом числа* $\frac{1}{2}$ и записывают: $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, а число $\frac{2\pi}{3}$ — *арккосинусом числа* $\left(-\frac{1}{2}\right)$ и записывают: $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Вообще уравнение $\cos x = a$, где $-1 \leqslant a \leqslant 1$, имеет на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ только один корень. Если $a \geqslant 0$, то корень заключен в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; если $a < 0$, то в промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Этот корень называют арккосинусом числа a и обозначают $\arccos a$ (рис. 67).

Арккосинусом числа a, модуль которого не больше единицы, называется такое число x из промежутка $0 \leqslant x \leqslant \pi$, косинус которого равен a:

$$\boxed{\arccos a = x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant \pi \text{ и } \cos x = a.} \qquad (5)$$

Например:

1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, так как $0 \leqslant \frac{\pi}{6} \leqslant \pi$ и $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, так как $0 \leqslant \frac{3\pi}{4} \leqslant \pi$ и $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

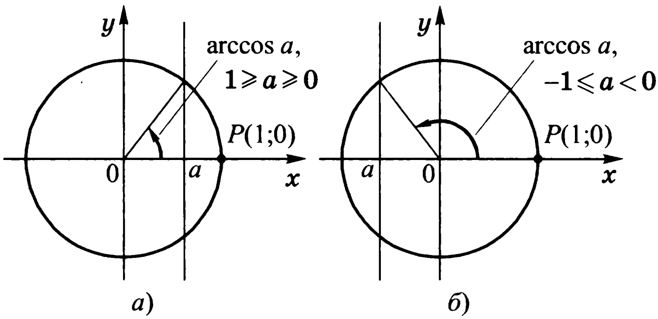


Рис. 67

Формулу (5) можно также представить в виде:

$$\boxed{\cos(\arccos a) = a, \text{ если } |a| \leqslant 1.} \qquad (6)$$

Например, $\cos(\arccos 0{,}3) = 0{,}3$.

З а д а ч а 4. Найти приближенное значение $\arccos(-0{,}75)$.

Δ Значение $\arccos(-0{,}75)$ можно приближенно найти на рисунке 68, измеряя угол *POM* транспортиром.

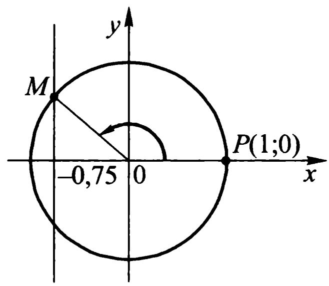


Рис. 68

Приближенные значения арккосинуса можно также находить с помощью специальных таблиц или микрокалькулятора. Например, значение $\arccos(-0{,}75)$ можно вычислить на микрокалькуляторе **МК–54** по программе

0,75 $\boxed{/-/}$ $\boxed{\mathrm{F}}$ $\boxed{\cos^{-1}}$ **2,4188583.**

Итак, $\arccos(-0{,}75) \approx 2{,}42$.

В данном случае переключатель микрокалькулятора **Р-ГРД-Г** был установлен в положение **Р** (радиан).

Если вычисления проводить в градусной мере, то переключатель микрокалькулятора **Р-ГРД-Г** следует установить в положение **Г** (градус). Программа вычислений остается прежней:

0,75 $\boxed{/-/}$ $\boxed{\mathrm{F}}$ $\boxed{\cos^{-1}}$ **138,59038.**

Итак, $\arccos(-0{,}75) \approx 139°$. ▲

З а д а ч а 5. Решить уравнение

$$\cos x = \cos \alpha, \qquad (7)$$

где α — заданное действительное число.

Δ Запишем уравнение (7) в виде

$$\cos x - \cos \alpha = 0.$$

По формуле разности косинусов получаем $-\frac{1}{2}\sin\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}=0$, откуда:

1) $\sin\frac{x+\alpha}{2}=0,\ \frac{x+\alpha}{2}=\pi k,$

$$x=-\alpha+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}; \tag{8}$$

2) $\sin\frac{x-\alpha}{2}=0,\ \frac{x-\alpha}{2}=\pi k,$

$$x=\alpha+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}. \tag{9}$$

Объединяя формулы (8), (9), имеем: $x=\pm\alpha+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. ▲

Отметим, что если в уравнении (7) $\alpha = \arccos a$, где $|a| \leqslant 1$, то его можно записать так: $\cos x = a$.

Результаты решения задач 1—3 позволяют сделать следующий вывод:

Все корни уравнения $\cos x=a$, где $|a| \leqslant 1$, находятся по формуле

$$\boxed{x=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.} \tag{10}$$

Отметим, что формулы (2) – (4) являются частными случаями формулы (10).

Задача 6. Решить уравнение $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Δ По формуле (10) находим $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi k$.

Так как $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$, то $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 7. Решить уравнение $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Δ По формуле (10) получаем $x=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi k$. Так как $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$, то $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 8. Решить уравнение $\cos x=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Δ Так как $\sqrt{5}>2$, то $-\sqrt{5}<-2$, поэтому $-\frac{\sqrt{5}}{2}<-1$. Следовательно, уравнение не имеет корней. ▲

Докажем, *что для любого* $a \in [-1; 1]$ *выполняется равенство*

$$\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a.} \qquad (11)$$

○ Обозначим $\arccos a = x$. По определению арккосинуса числа имеем:

1) $0 \leqslant x \leqslant \pi$; 2) $\cos x = a$.

Тогда:

1) по свойствам неравенств $-\pi \leqslant -x \leqslant 0$, откуда $0 \leqslant \pi - x \leqslant \pi$;

2) по формуле приведения $\cos(\pi - x) = -\cos x = -a$.

Следовательно, по определению арккосинуса числа имеем:

$$\arccos(-a) = \pi - x = \pi - \arccos a. \ ●$$

Например, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Формула (11) позволяет сводить значения арккосинуса отрицательных чисел к значениям арккосинуса положительных чисел. Поэтому в таблицах обычно даются значения арккосинуса только для неотрицательных чисел.

Приведем таблицу часто встречающихся значений арккосинуса:

a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

З а д а ч а 9. Решить уравнение $\cos x = -\frac{2}{5}$.

Δ По формуле (2) находим $x = \pm\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ или

$x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{2}{5}\right) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 10. Решить уравнение $1 + 2\cos(2x - 1) = 0$.

Δ Данное уравнение можно представить в виде

$$\cos(2x - 1) = -\frac{1}{2}.$$

Отсюда $2x - 1 = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n =$

$= \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $\quad 2x = 1 \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $\quad x = \frac{1}{2} \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Отметим, что корни тригонометрических уравнений обычно записываются действительными числами, выраженными с помощью числа π. Это связано с тем, что значения тригонометрических функций повторяются через промежутки, кратные π.

Так, корнями уравнения $\cos x = \cos 5$ являются числа $x = \pm 5 + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Приведем еще несколько задач на применение рассмотренных формул.

Задача 11. Решить уравнение $\cos 3x \cos x = 1 - \sin 3x \sin x$.

$$\Delta \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x = 1, \qquad \cos 2x = 1,$$
$$2x = 2\pi n, \qquad x = \pi n, \qquad n \in \mathbf{Z}. \ \blacktriangle$$

Задача 12. Решить уравнение $(4\cos x - 1)(2\cos 2x + 1) = 0$.

Δ 1) $4\cos x - 1 = 0$, $\cos x = \frac{1}{4}$, $x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2) $2\cos 2x + 1 = 0$, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, $2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. $\blacktriangle$

Задача 13. Вычислить $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Δ Так как $0 < \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) < \pi$, то $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) > 0$. Следовательно, $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = +\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)} =$

$= \sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. $\blacktriangle$

Задача 14. Вычислить $\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)$.

Δ Сначала вычислим $\cos\frac{5\pi}{4}$. По формуле приведения $\cos\frac{5\pi}{4} =$

$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно,

$$\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}. \ \blacktriangle$$

З а д а ч а 15. Вычислить $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$.

Δ Так как $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$, то $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$. ▲

Вообще

$$\boxed{\arccos(\cos x)=x \text{ при } 0\leqslant x\leqslant\pi.} \qquad (12)$$

○ По определению арккосинуса числа равенство

$$\arccos a=x \qquad (13)$$

означает, что:

1) $0\leqslant x\leqslant\pi$; 2) $\cos x=a$.

Подставляя в равенство (13) $a=\cos x$, получаем формулу (12). ●

Например, по формуле (12) находим

$$\arccos\left(\cos\frac{3\pi}{5}\right)=\frac{3\pi}{5}, \qquad \arccos(\cos 2)=2.$$

Эту же задачу можно также решить с помощью формулы (12).

З а д а ч а 16. Вычислить $\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)$.

Δ Так как $\frac{5\pi}{4}>\pi$, то нельзя сразу применить формулу (12).

Заметим, что $\cos\frac{5\pi}{4}=\cos\left(2\pi-\frac{5\pi}{4}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}$. Теперь формулу (12) можно применить, так как $0\leqslant\frac{3\pi}{4}\leqslant\pi$. Получим $\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)=$ $=\arccos\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{4}$. ▲

З а д а ч а 17. Вычислить $\arccos(\cos 4)$.

Δ Так как $4>\pi$, то нельзя сразу применять формулу (12). Сначала надо заменить $\cos 4$ косинусом числа, принадлежащего отрезку $[0; \pi]$. Отметим, что $\pi<4<2\pi$, откуда $-2\pi<-4<-\pi$, $0<2\pi-4<\pi$.

Так как $\cos(2\pi-4)=\cos(-4)=\cos 4$, то по формуле (12) находим

$$\arccos(\cos 4)=\arccos(\cos(2\pi-4))=2\pi-4.$$ ▲

Упражнения

Вычислить (719–720).

719. 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos 1$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\arccos\frac{1}{2}$; 5) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

720. 1) $2 \arccos 0 + 3 \arccos 1$; 2) $3 \arccos(-1) - 2 \arccos 0$;

3) $12 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

4) $4 \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 6 \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Вычислить (721–723).

721. 1) $\cos\left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\sin\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

2) $\cos\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$;

3) $\sin\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

722. 1) $\cos\left(6\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\sin(5 \arccos 0)$;

2) $\cos\left(3\arccos \frac{1}{2}\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(2\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) $\sin\left(4\arccos \frac{1}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(3\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

723. 1) $\arccos\left(\cos \frac{3\pi}{4}\right)$; 3) $\arccos\left(\cos \frac{2}{3}\pi\right)$;

2) $\arccos\left(\cos \frac{3\pi}{2}\right)$; 4) $\arccos\left(\cos \frac{13}{4}\pi\right)$.

724. Сравнить числа:

1) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\arccos \frac{1}{2}$; 3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

2) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\arccos 0$; 4) $\arccos(-1)$ и $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

725. Сравнить числа:

1) $\arccos \frac{1}{3}$ и $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$; 2) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $\arccos(-1)$.

Решить уравнение (726–728).

726. 1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos x = \frac{1}{2}$; 4) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

727. 1) $\cos x = \frac{1}{3}$;

2) $\cos x = \frac{3}{4}$;

3) $\cos x = -0{,}3$;

4) $\cos x = -0{,}2$.

728. 1) $\cos 4x = 1$;

2) $\cos 2x = -1$;

3) $\sqrt{2} \cos \frac{x}{4} = -1$;

4) $2 \cos \frac{x}{3} = \sqrt{3}$;

5) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

6) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Вычислить (729–732).

729. 1) $\arccos\left(\cos\frac{7}{6}\pi\right)$; 2) $\arccos\left(\cos\frac{4}{3}\pi\right)$; 3) $\arccos\left(\sin\frac{4\pi}{3}\right)$;

4) $\arccos\left(\sin\frac{7}{6}\pi\right)$; 5) $\arccos\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)$; 6) $\arccos\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)$.

730. 1) $\cos(\arccos 0{,}2)$;

2) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$;

3) $\cos\left(\pi + \arccos\frac{3}{4}\right)$;

4) $\cos(\pi - \arccos 0{,}3)$;

5) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

6) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

731. 1) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$;

2) $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$;

3) $\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$;

4) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$;

5) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$;

6) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

732. 1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3} + \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; 2) $\cos\left(\arccos\frac{4}{5} - \arccos\frac{3}{5}\right)$.

733. Упростить выражение, если $-1 \leqslant a \leqslant 1$:

1) $\cos(\pi + \arccos a)$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arccos a\right)$;

3) $\cos(2 \arccos a)$;

4) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \arccos a\right)$.

734. Решить уравнение:

1) $\cos x \cos 3x = \sin 3x \sin x$;

2) $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = 0$.

735. Выяснить, имеет ли смысл выражение:

1) $\arccos(\sqrt{6}-3)$;
2) $\arccos(\sqrt{7}-2)$;
3) $\arccos(2-\sqrt{10})$;
4) $\arccos(1-\sqrt{5})$;
5) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
6) $\operatorname{tg}\left(3\arccos\frac{1}{2}\right)$.

Решить уравнение (736 – 737).

736. 1) $\cos^2 2x = 1 + \sin^2 2x$;
2) $4\cos^2 x = 3$;
3) $2\cos^2 x = 1 + 2\sin^2 x$;
4) $2\sqrt{2}\cos^2 x = 1 + \sqrt{2}$.

737. 1) $(1+\cos x)(3-2\cos x) = 0$;
2) $(1-\cos x)(4+3\cos 2x) = 0$;
3) $(1+2\cos x)(1-3\cos x) = 0$;
4) $(1-2\cos x)(2+3\cos x) = 0$.

738*. Решить уравнение:

1) $\arccos(2x-3) = \frac{\pi}{3}$;
2) $\arccos\frac{x+1}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

739. Найти все корни уравнения $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

740. Найти все корни уравнения $\cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, удовлетворяющие неравенству $|x| < \frac{\pi}{4}$.

741*. Доказать, что если $-1 \leqslant a \leqslant 1$, то $2\arccos\sqrt{\frac{1+a}{2}} = \arccos a$.

§ 38. Уравнение $\sin x = a$

Рассмотрим уравнение

$$\sin x = a. \qquad (1)$$

Так как множество значений синуса — отрезок $[-1; 1]$, то уравнение (1) имеет корни только при $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

Корни уравнения (1) при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ были ранее найдены:

$\sin x = 0$	$x = \pi n,\ n \in Z$	(2)
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$	(3)
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$	(4)

Задача 1. Решить уравнение $\sin 2x = 1$.

Δ По формуле (3) имеем $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, откуда

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \ \blacktriangle$$

Задача 2. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Δ Напомним, что $\sin x$ — ордината точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол x. Ординату, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рис. 69).

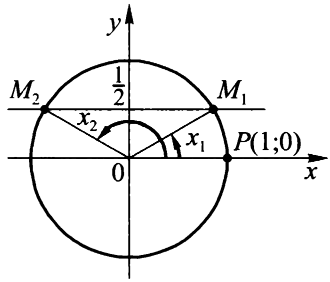


Рис. 69

Так как $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, то точка M_1 получается из точки $P(1;\ 0)$ поворотом на угол $x_1 = \frac{\pi}{6}$, а также на углы $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Точка M_2 получается из точки $P(1;\ 0)$ поворотом на угол $x_2 = \frac{5\pi}{6}$, а также на углы $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, т. е. на углы $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Итак, все корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ можно найти по формулам:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Эти формулы объединяются в одну:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \qquad (5)$$

В самом деле, если n — четное число, т. е. $n = 2k$, то из формулы (5) имеем $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, а если n — нечетное число, т. е. $n = 2k + 1$, то из этой же формулы получаем $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

Ответ. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. $\blacktriangle$

З а д а ч а 3. Решить уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$.

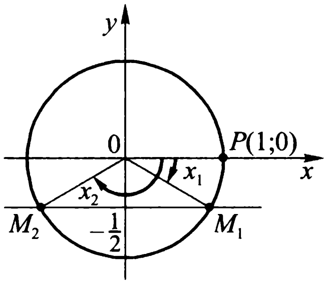


Рис. 70

Δ Ординату, равную $-\frac{1}{2}$, имеют две точки единичной окружности M_1 и M_2 (рис. 70), где $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, $x_2 = -\frac{5\pi}{6}$. Следовательно, все корни уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$ можно найти по формулам: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Эти формулы объединяются в одну:

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \qquad (6)$$

В самом деле, если $n = 2k$, то по формуле (6) имеем $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, а если $n = 2k - 1$, то из этой же формулы находим $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

О т в е т. $x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$. ▲

Итак, каждое из уравнений $\sin x = \frac{1}{2}$ и $\sin x = -\frac{1}{2}$ имеет бесконечное множество корней. На отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ — корень уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ и $x_2 = -\frac{\pi}{6}$ — корень уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$. Число $\frac{\pi}{6}$ называют *арксинусом числа* $\frac{1}{2}$ и записывают так: $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; число $-\frac{\pi}{6}$ называют *арксинусом числа* $-\frac{1}{2}$ и записывают: $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Вообще уравнение $\sin x = a$, где $-1 \leqslant a \leqslant 1$, на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ имеет только один корень. Если $a \geqslant 0$, то корень заключен в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; если $a < 0$, то в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Этот корень называют арксинусом числа a и обозначают $\arcsin a$ (рис. 71).

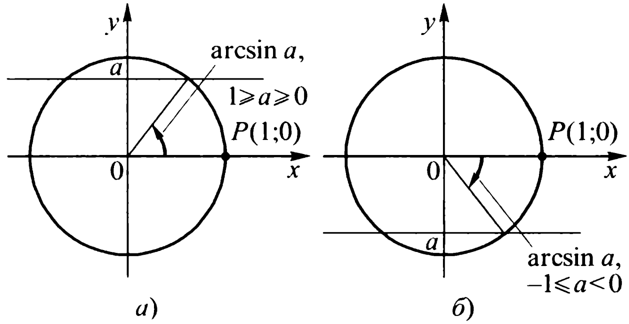


Рис. 71

Арксинусом числа a, модуль которого не больше единицы, называется такое число x из промежутка $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, синус которого равен a:

$$\boxed{\arcsin a = x, \text{ если } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ и } \sin x = a.} \qquad (7)$$

Например:

1) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 4. Найти приближенное значение $\arcsin \frac{2}{3}$.

Δ Значение $\arcsin \frac{2}{3}$ можно приближенно найти из рисунка 72, измеряя угол POM транспортиром.

Значения арксинуса можно находить по специальным таблицам или с помощью микрокалькулятора. Например, значение $\arcsin \frac{2}{3}$ можно вычислить на микрокалькуляторе **МК–54** по программе:

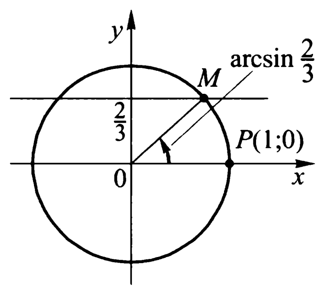


Рис. 72

2 $\boxed{\text{В}\uparrow}$ 3 $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\sin^{-1}}$ **$7{,}2972769 \cdot 10^{-1}$.**

Итак, $\arcsin \frac{2}{3} \approx 0{,}73$. При этом переключатель микрокалькулятора **Р-ГРД-Г** был установлен в положение **Р** (радиан). ▲

Формулу (7) можно записать и так:

$$\boxed{\sin(\arcsin a) = a,\ \text{если}\ |a| \leqslant 1.} \tag{8}$$

З а д а ч а 5. Решить уравнение

$$\sin x = \sin \alpha, \tag{9}$$

где α — заданное действительное число.

Δ Запишем уравнение (9) в виде:

$$\sin x - \sin \alpha = 0.$$

По формуле разности синусов имеем

$$\frac{1}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{x+\alpha}{2} = 0,$$

откуда:

1) $\sin\frac{x-\alpha}{2} = 0$, $\frac{x-\alpha}{2} = \pi k$,

$$x = \alpha + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}; \tag{10}$$

2) $\cos\frac{x+\alpha}{2} = 0$, $\frac{x+\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$,

$$x = -\alpha + \pi(2k+1),\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{11}$$

Объединяя формулы (10), (11), получаем

$$x = (-1)^n\alpha + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.\ ▲$$

Отметим, что если в уравнении (9) $\alpha = \arcsin a$, где $|a| \leqslant 1$, то его можно представить так: $\sin x = a$.

Результаты решения задач **2, 3** и **5** позволяют сделать следующий вывод.

Все корни уравнения $\sin x = a$, где $|a| \leqslant 1$, находятся по формуле

$$\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.} \tag{12}$$

Отметим, что формулы (2) — (4) являются частными случаями формулы (12).

З а д а ч а 6. Решить уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Δ По формуле (12) имеем $x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n$. Так как $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, то $x = (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 7. Решить уравнение $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Δ По формуле (12) находим $x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n$. Так как

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, то $x = -(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 8. Решить уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

Δ Так как $\sqrt{10} > 3$, то $\frac{\sqrt{10}}{3} > 1$, и поэтому данное уравнение не имеет корней. ▲

Докажем, что *для любого $a \in [-1; 1]$ выполняется равенство*

$$\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a.} \qquad (13)$$

○ Обозначим $\arcsin a = \alpha$. По определению арксинуса числа это означает, что:

1) $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$; 2) $\sin\alpha = a$.

Тогда:

1) по свойствам неравенств $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$;

2) используя формулу $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, получаем $\sin(-\alpha) = -a$.

Следовательно, по определению арксинуса числа:

$$\arcsin(-a) = -\alpha = -\arcsin a. \; ●$$

Например, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

Формула (13) позволяет сводить значения арксинуса отрицательных чисел к значениям арксинуса положительных чисел. Поэтому в таблицах обычно даются значения арксинуса только для неотрицательных чисел.

Приведем таблицу часто встречающихся значений арксинуса:

a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Задача 9. Решить уравнение $\sin x = \frac{2}{5}$.

Δ По формуле (12) находим $x = (-1)^n \arcsin \frac{2}{5} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 10. Решить уравнение $1 - 2\sin(3x + 4) = 0$.

Δ Данное уравнение можно записать в виде $\sin(3x + 4) = \frac{1}{2}$.

Отсюда $3x + 4 = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$,

$$3x = -4 + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

$$x = -\frac{4}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}. \ ▲$$

Задача 11. Решить уравнение $\sin 5x \cos 2x = \cos 5x \sin 2x$.

$\Delta\ \sin 5x \cos 2x - \cos 5x \sin 2x = 0,\ \sin 3x = 0,\ 3x = \pi n,$

$$x = \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}. \ ▲$$

Задача 12. Решить уравнение $(3\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) = 0$

Δ 1) $3\sin x - 1 = 0,\ \sin x = \frac{1}{3},\ x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $2\sin 2x + 1 = 0,\ \sin 2x = -\frac{1}{2},\ 2x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n =$

$= (-1)^n \left(-\arcsin \frac{1}{2}\right) + \pi n = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n,$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ. $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n,\ x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 13. Вычислить $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.

Δ Так как $-\frac{\pi}{2} < \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right) < \frac{\pi}{2}$, то $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right) > 0$.

Следовательно, $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = +\sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)} =$

$= \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$. ▲

Задача 14. Вычислить $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Δ Так как $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$. ▲

Вообще

$$\boxed{\arcsin(\sin x) = x \text{ при } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.} \qquad (14)$$

○ По определению арксинуса числа равенство

$$\arcsin a = x \qquad (15)$$

означает, что:

1) $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$; 2) $\sin x = a$.

Подставляя в равенство (15) $a = \sin x$, получаем формулу (14). ●

Например, по формуле (14) находим $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$, $\arcsin(\sin(-1{,}5)) = -1{,}5$.

Задача 15. Вычислить $\arcsin\left(\sin\frac{5}{6}\pi\right)$.

Δ Сначала вычислим $\sin\frac{5\pi}{6}$. По формуле приведения имеем

$$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}. \quad ▲$$

Задачу 15 можно также решить с помощью формулы (14).

Δ Так как $\frac{5\pi}{6} > \frac{\pi}{2}$, то нельзя сразу применить формулу (14).

Заметим, что $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$. Теперь формулу (14) можно применить, так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Получаем

$$\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}. \quad ▲$$

З а д а ч а 16. Вычислить $\arcsin(\sin 5)$.

Δ Так как $\frac{3}{2}\pi < 5 < 2\pi$, то $-\frac{\pi}{2} < 5 - 2\pi < 0$, т. е. $5 - 2\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Следовательно,

$$\arcsin(\sin 5) = \arcsin(\sin(5 - 2\pi)) = 5 - 2\pi. \ \blacktriangle$$

Упражнения

Вычислить (742–749).

742. 1) $\arcsin 0$; 2) $\arcsin 1$; 3) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\arcsin \frac{1}{2}$; 5) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

743. 1) $\arcsin 1 - \arcsin(-1)$; 3) $\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

744. 1) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

2) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

3) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

745. 1) $\sin(4\arcsin 1)$; 4) $\cos(6\arcsin 1)$;

2) $\sin\left(3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{1}{2}\right)$;

3) $\cos\left(5\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(4\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

746. 1) $\cos(\arcsin 0{,}6)$; 2) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

747. 1) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 3) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

2) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 4) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

748. 1) $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)$.

749. 1) $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

750. Сравнить числа:

1) $\arcsin\frac{1}{4}$ и $\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)$; 2) $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $\arcsin(-1)$.

Решить уравнение (751–755).

751. 1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$;

2) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x=-\frac{1}{2}$.

752. 1) $\sin x=\frac{3}{4}$; 3) $\sin x=-\frac{1}{4}$;

2) $\sin x=\frac{2}{7}$; 4) $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

753. 1) $\sin 3x=1$; 4) $2\sin\frac{x}{2}=\sqrt{3}$;

2) $\sin 2x=-1$; 5) $\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=0$;

3) $\sqrt{2}\sin\frac{x}{3}=-1$; 6) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=0$.

754. 1) $\sin x=-\frac{2}{3}$; 3) $\sin x=\frac{1+\sqrt{5}}{3}$;

2) $\sin x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\sin x=\frac{1-\sqrt{10}}{2}$.

755. 1) $\sin(2x-1)=\frac{1}{2}$; 2) $\sin(3x+2)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Вычислить (756–759).

756. 1) $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 5) $\arcsin\left(2\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

2) $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; 6) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $\arcsin\left(\cos\frac{5\pi}{6}\right)$; 7) $\arcsin(\sin 4)$;

4) $\arcsin\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)$; 8) $\arcsin(\sin 7)$.

757. 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$; 4) $\sin\left(\pi+\arcsin\frac{2}{3}\right)$;

2) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$; 5) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;

3) $\sin\left(\pi-\arcsin\frac{3}{4}\right)$; 6) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{5}\right)$.

758. 1) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$; 4) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$;

2) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;

3) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

759. 1) $\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

760. Вычислить:

1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; 3) $\cos\left(\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}+\arcsin\frac{1}{3}\right)$;

2) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{4}{5}\right)$; 4) $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}+\arccos\frac{3}{5}\right)$.

761. Вычислить:

1) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$; 2) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{4}\right)$.

762. Выяснить, имеет ли смысл выражение:

1) $\arcsin(\sqrt{5}-2)$; 4) $\arcsin(2-\sqrt{10})$;

2) $\arcsin(\sqrt{5}-3)$; 5) $\operatorname{tg}\left(6\arcsin\frac{1}{2}\right)$;

3) $\arcsin(3-\sqrt{17})$; 6) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решить уравнение (**763–765**).

763. 1) $1-4\sin x\cos x=0$; 3) $1+6\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}=0$;

2) $\sqrt{3}+4\sin x\cos x=0$; 4) $1-8\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}=0$.

764. 1) $1+\cos 5x\sin 4x=\cos 4x\sin 5x$;

2) $1-\sin x\cos 2x=\cos x\sin 2x$.

765. 1) $(2\sin x - 1)(3\sin x + 1) = 0$;

2) $(4\sin x - 3)(2\sin x + 1) = 0$;

3) $(2\sin 2x - 1)(\sin 4x + 1) = 0$;

4) $(4\sin 3x - 1)(2\sin x + 3) = 0$.

766. Найти все корни уравнения $\sin 2x = \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

767. Найти все корни уравнения $\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, удовлетворяющие неравенству $\log_\pi (x - 4\pi) < 1$.

768. Найти наименьший положительный корень уравнения

$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

769*. Решить уравнение:

1) $\arcsin\left(\frac{x}{2} - 3\right) = \frac{\pi}{6}$; 2) $\arcsin(3 - 2x) = -\frac{\pi}{4}$.

770*. Доказать равенство:

1) $\arcsin \frac{4}{\sqrt{65}} - \arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{130}}\right) = -\frac{3\pi}{4}$;

2) $\arccos \frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) = \arccos\left(-\frac{13}{24}\right)$.

771*. Доказать, что если $0 \leqslant a \leqslant 1$, то $2\arcsin a = \arccos(1 - 2a^2)$.

§ 39. Уравнение tg $x = a$

Напомним, что значения синуса и косинуса можно находить геометрически, измеряя ординаты и абсциссы соответствующих точек единичной окружности. Покажем, как можно геометрически находить значения тангенса.

Рассмотрим сначала случай, когда $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Пусть точка M_1 получена поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол x радиан (рис. 73). Соединим отрезком точку M_1 с точкой O и проведем $M_1A \perp OP$. Тогда ордината точки M_1 равна $AM_1 = \sin x$, а абсцисса $AO = \cos x$.

Поэтому

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{AM_1}{AO}.$$

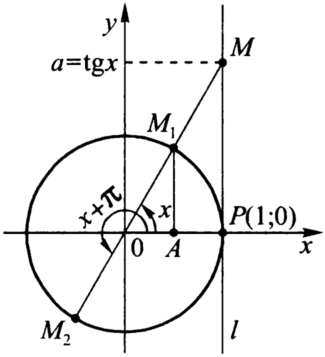


Рис. 73

Теперь через точку $P(1;\ 0)$ проведем прямую l перпендикулярно PO и продолжим прямую OM_1 до пересечения с прямой l в точке M (см. рис. 73). Из подобия треугольников M_1AO и MPO получаем

$$\frac{AM_1}{AO} = \frac{PM}{PO} = \operatorname{tg} x.$$

Так как $PO = 1$, то

$$PM = \operatorname{tg} x.$$

Итак, в этом случае значение $\operatorname{tg} x$ можно найти геометрически, измерив длину отрезка PM, т. е. ординату точки M (см. рис. 73).

Рассуждения и построение можно провести в обратном порядке и найти геометрически угол x по значению $\operatorname{tg} x$, т. е. найти корень уравнения

$$\operatorname{tg} x = a,$$

где a — любое заданное положительное число. А именно: на прямой l построим точку M с ординатой a, соединим точку M с точкой O и измерим угол $x = \angle POM$ транспортиром (см. рис. 73).

Таким образом, между числами x, где $0 < x < \frac{\pi}{2}$, и точками прямой l, лежащими выше оси абсцисс, установлено взаимно однозначное соответствие.

Так как $\operatorname{tg} 0 = 0$, то, естественно, числу $x = 0$ поставим в соответствие точку $P(1;\ 0)$ прямой l.

Напомним, что тангенс угла $\frac{\pi}{2}$ не существует. Это видно и геометрически: если точка M_1 лежит на оси ординат, то прямые OM_1 и l параллельны и поэтому точки пересечения M не существует.

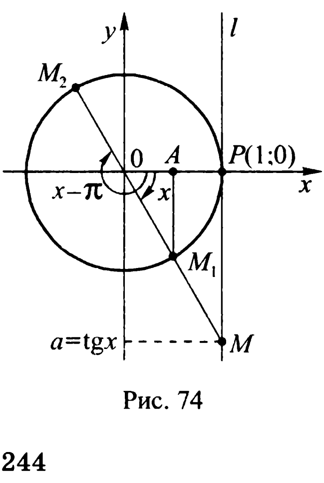


Рис. 74

Теперь рассмотрим случай, когда $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Сделаем аналогичные построения (рис. 74). Тогда $\sin x = -AM_1$, $\cos x = AO$.

Поэтому

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{AM_1}{AO}.$$

Из подобия треугольников M_1AO и MPO имеем

$$\frac{AM_1}{AO} = \frac{PM}{PO} = -\operatorname{tg} x,$$

а так как $PO = 1$, то

$$PM = -\operatorname{tg} x.$$

Отметим, что и в этом случае $\operatorname{tg} x = -PM$ — это ордината точки M.

Итак, между числами x из интервала $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ и всеми точками прямой l установлено взаимно однозначное соответствие. Прямую l называют *линией тангенсов*.

Кроме того, показано, что уравнение

$$\operatorname{tg} x = a,$$

где a — любое действительное число, имеет единственный корень x на интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Этот корень называют *арктангенсом числа* a и обозначают $\operatorname{arctg} a$ (рис. 75).

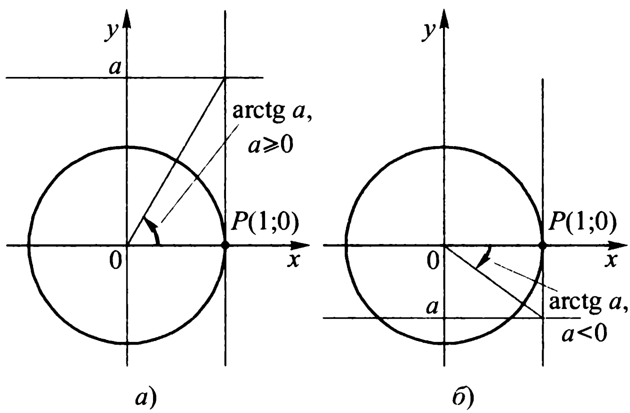


Рис. 75

Арктангенсом числа $a \in R$ называется такое число $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a:

$$\boxed{\operatorname{arctg} a = x, \text{ если } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ и } \operatorname{tg} x = a.} \quad (1)$$

Например:

1) $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, так как $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;

2) $\operatorname{arctg} (-1) = -\frac{\pi}{4}$, так как $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

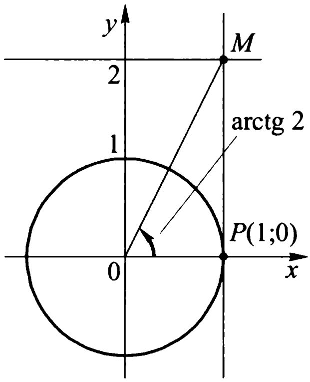


Рис. 76

Задача 1. Найти приближенное значение arctg 2.

Δ Значение arctg 2 можно приближенно найти из рисунка 76, измеряя угол POM транспортиром.

Приближенные значения арктангенса можно также найти по таблицам или с помощью микрокалькулятора.

Например, значение arctg 2 можно вычислить на **МК–54** по программе

$$2 \boxed{F} \boxed{tg^{-1}} \ \mathbf{1,1071486.}$$

Итак, $\operatorname{arctg} 2 \approx 1{,}11$. ▲

Из формулы (1) следует, что

$$\boxed{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a,\ a \in \boldsymbol{R}.} \qquad (2)$$

Например:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 12) = 12,\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-\sqrt{7})) = -\sqrt{7},\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 0) = 0.$$

Задача 2. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha, \qquad (3)$$

где α — заданное число, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Δ Преобразуем это уравнение:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0,$$

$$\frac{\sin x \cos \alpha - \cos x \sin \alpha}{\cos x \cos \alpha} = 0,$$

$$\frac{\sin(x-\alpha)}{\cos x \cos \alpha} = 0. \qquad (4)$$

Заметим, что $\cos \alpha \neq 0$, так как $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. Кроме того, и $\cos x \neq 0$, так как при $\cos x = 0$ левая часть уравнения не определена. Следовательно, $\sin(x - \alpha) = 0$, откуда $x - \alpha = \pi n$, $x = \alpha + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $x = \alpha + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Отметим, что если в уравнении (3) $\alpha = \operatorname{arctg} a$, $a \in \boldsymbol{R}$, то уравнение (3) можно представить так:

$$\operatorname{tg} x = a.$$

Результат решения задачи **2** приводит к выводу:
все корни уравнения

$$\operatorname{tg} x = a,\ a \in \boldsymbol{R}$$

находятся по формуле

$$\boxed{x = \operatorname{arctg} a + \pi n\ ,\ n \in \boldsymbol{Z}.} \qquad (5)$$

Задача 3. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = 1$.

Δ По формуле (5) находим $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ▲

Задача 4. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Δ По формуле (5) имеем $x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi n = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ▲

Задача 5. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = 5$.
Δ По формуле (5) находим $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ▲

Задача 6. Решить уравнение $(\operatorname{tg} x + 1)\left(2\cos\frac{x}{3} - \sqrt{3}\right) = 0$.

Δ 1) $\operatorname{tg} x + 1 = 0,\ \operatorname{tg} x = -1,\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Эти значения x являются корнями исходного уравнения, так как при этом выражение в первой скобке левой части уравнения равно нулю, а во второй — не теряет смысла.

2) $2\cos\frac{x}{3} - \sqrt{3} = 0,\ \cos\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{x}{3} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ x = \pm\frac{\pi}{2} + 6\pi n,$ $n \in \boldsymbol{Z}.$

При этих значениях x выражение во второй скобке левой части исходного уравнения равно нулю, а в первой — не имеет смысла. Поэтому эти значения не являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ▲

Докажем, что для любого действительного числа a выполняется равенство

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a.} \qquad (6)$$

○ Обозначим $\operatorname{arctg} a = \alpha$. По определению арктангенса числа имеем:

1) $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = a$.

Тогда:

1) по свойствам неравенств $-\frac{\pi}{2} < -\alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) используя формулу $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, получаем $\operatorname{tg}(-\alpha) = -a$.

Следовательно, по определению арктангенса числа

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\alpha = -\operatorname{arctg} a. \quad \bullet$$

Например, $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$.

Формула (6) позволяет сводить значения арктангенса отрицательных чисел к значениям арктангенса положительных чисел. Поэтому в таблицах обычно даются значения арктангенса только для неотрицательных чисел.

Приведем таблицу часто встречающихся значений арктангенса:

a	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Задача 7. Вычислить $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)$.

Δ Так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, то $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$. ▲

Вообще

$$\boxed{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \text{при } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.} \qquad (7)$$

○ По определению арктангенса числа равенство

$$\operatorname{arctg} a = x \qquad (8)$$

означает, что:

1) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{tg} x = a$.

Подставляя в равенство (8) $a = \operatorname{tg} x$, получаем формулу (7). ●

Например, по формуле (7) находим $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right) = -\frac{\pi}{9}$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1{,}5) = 1{,}5$.

З а д а ч а 8. Вычислить $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right)$.

Δ Сначала вычислим $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$. По формуле приведения

$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-1.$

Следовательно, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right)=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$. ▲

Задачу 8 можно также решить с помощью формулы (7).

Δ Так как $\frac{3\pi}{4}>\frac{\pi}{2}$, то нельзя сразу применить формулу (7).

Заметим, что $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Теперь можно применить формулу (7), так как $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$. Получаем

$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=-\frac{\pi}{4}$. ▲

З а д а ч а 9. Вычислить $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}3)$.

Δ Так как $\frac{\pi}{2}<3<\pi$, то $-\frac{\pi}{2}<3-\pi<\frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}3)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(3-\pi))=3-\pi. \quad ▲$$

Упражнения

Вычислить (772–773).

772. 1) $\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)$;

3) $\operatorname{arctg}0+\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;

2) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}$;

4) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arctg}0$.

773. 1) $6\operatorname{arctg}\sqrt{3}-4\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

2) $2\operatorname{arctg}1+3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

3) $3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$;

4) $5\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})-3\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$.

774. Сравнить числа:

1) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ и $\operatorname{arctg} 1$;

2) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$;

3) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

4) $\operatorname{arctg}(-1)$ и $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

5) $\operatorname{arctg} 1$ и $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

6) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ и $\arccos\frac{1}{2}$.

775. Вычислить:

1) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}\sqrt{3})$;

2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 1)$;

3) $\sin(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$;

4) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

5) $\cos(\operatorname{arctg} 1)$;

6) $\cos(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$.

Решить уравнение (776–777).

776. 1) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;

3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$;

4) $\operatorname{tg} x = -1$;

5) $\operatorname{tg} x = 4$;

6) $\operatorname{tg} x = -5$.

777. 1) $\operatorname{tg} 2x = 0$;

2) $\operatorname{tg} 3x = 0$;

3) $1 + \operatorname{tg}\frac{x}{3} = 0$;

4) $\sqrt{3} + \operatorname{tg}\frac{x}{6} = 0$.

Вычислить (778–781).

778. 1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 5)$;

2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3{,}5)$;

3) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-12))$;

4) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-9))$;

5) $\operatorname{tg}\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)$;

6) $\operatorname{tg}\left(\pi + \operatorname{arctg}\frac{5}{4}\right)$;

7) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 3\right)$;

8) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2\right)$.

779. 1) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right)$;

2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}\right)$;

3) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}\right)$;

4) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}\right)$;

5) $\operatorname{arctg}\left(2\sin\frac{5\pi}{6}\right)$;

6) $\operatorname{arctg}\left(2\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

7) $\operatorname{arctg}\left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)$;

8) $\operatorname{arctg}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

780. 1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2{,}1)$; 3) $\operatorname{tg}(\pi - \operatorname{arctg} 7)$;

2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-0{,}3))$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 6\right)$.

781. 1) $3 \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\right)$; 3) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}\right)$;

2) $4 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0{,}5)$; 4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 13)$.

Решить уравнение (782–783).

782. 1) $(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0$; 4) $(\operatorname{tg} x - 4{,}5)(1 + 2\sin x) = 0$;

2) $(\sqrt{3}\ \operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$; 5) $(\operatorname{tg} x + 4)\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right) = 0$;

3) $(\operatorname{tg} x - 2)(2\cos x - 1) = 0$; 6) $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{6} + 1\right)(\operatorname{tg} x - 1) = 0$.

783*. 1) $\operatorname{arctg}(5x - 1) = \frac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{arctg}(3 - 5x) = -\frac{\pi}{3}$.

784. С помощью микрокалькулятора решить уравнение:

1) $\operatorname{tg} x = 9$; 2) $\operatorname{tg} x = -7{,}8$.

785. Найти наименьший положительный и наибольший отрицательный корни уравнения $3\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$.

786*. Доказать равенства:

1) $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \frac{3\pi}{4}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

787*. Доказать, что если $ab \ne 1$, то $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b) = \frac{ab}{1-ab}$.

788*. Доказать, что при любом действительном значении a справедливо равенство $\cos(\operatorname{arctg} a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.

§ 40. Уравнение ctg *x* = *a*

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{ctg} x = a.$$

Используя формулу приведения, запишем это уравнение так:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a. \qquad (1)$$

В § 39 показано, что уравнение (1) при любом заданном действительном значении a имеет единственный корень в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. тогда, когда

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x < \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$-\pi < -x < 0,$$

$$0 < x < \pi.$$

Итак, уравнение $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \boldsymbol{R}$ имеет единственный корень на интервале $0 < x < \pi$. Этот корень называют арккотангенсом числа a и обозначают $\operatorname{arcctg} a$.

Арккотангенсом числа $a \in \boldsymbol{R}$ называется такое число $x \in (0; \pi)$, котангенс которого равен a:

$$\boxed{\operatorname{arcctg} a = x, \text{ если } 0 < x < \pi \text{ и } \operatorname{ctg} x = a.} \qquad (2)$$

Например:

1) $\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$, так как $0 < \frac{\pi}{3} < \pi$ и $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $\operatorname{arcctg} (-1) = \frac{3\pi}{4}$, так как $0 < \frac{3\pi}{4} < \pi$ и $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = -1$.

Из формулы (2) следует, что

$$\boxed{\operatorname{ctg} (\operatorname{arcctg} a) = a, \ a \in \boldsymbol{R}.} \qquad (3)$$

Например: $\operatorname{ctg} (\operatorname{arcctg} 15) = 15$; $\operatorname{ctg} (\operatorname{arcctg} (-7)) = -7$; $\operatorname{ctg} (\operatorname{arcctg} 0) = 0$.

При определении арккотангенса числа a формулой (2) было установлено, что $x = \operatorname{arcctg} a$ является единственным корнем уравнения

$$\operatorname{ctg} x = a$$

на промежутке $0 < x < \pi$.

Так же, как и в § 39, доказывается, что *все корни уравнения*

$$\operatorname{ctg} x = a, \ a \in \boldsymbol{R}$$

находятся по формуле

$$\boxed{x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.} \qquad (4)$$

Задача 1. Решить уравнения:

1) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; 2) $\operatorname{ctg} x = -1$; 3) $\operatorname{ctg} x = 0$.

Δ По формуле (4) находим:

1) $x = \operatorname{arcctg} \sqrt{3} + \pi n = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $x = \operatorname{arcctg} (-1) + \pi n = \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

3) $x = \operatorname{arcctg} 0 + \pi n = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Докажем, что *для любого $a \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство*

$$\boxed{\operatorname{arcctg} (-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a.} \qquad (5)$$

○ Обозначим $\operatorname{arcctg} a = x$. По определению арккотангенса числа имеем:

1) $0 < x < \pi$; 2) $\operatorname{ctg} x = a$.

Тогда:

1) по свойствам неравенств $-\pi < -x < 0$, откуда $0 < \pi - x < \pi$;

2) по формуле приведения $\operatorname{ctg} (\pi - x) = -\operatorname{ctg} x = -a$.

Следовательно, по определению арккотангенса числа:

$$\operatorname{arcctg} (-a) = \pi - x = \pi - \operatorname{arcctg} a. \ \bullet$$

Рассуждая аналогично, можно также показать, что

$$\boxed{\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2},\ a \in \boldsymbol{R}.} \qquad (6)$$

Формула (5) позволяет сводить значения арккотангенса отрицательных чисел к значениям арккотангенса положительных чисел.

Приведем таблицу некоторых значений арккотангенса:

a	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arcctg} a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Аналогично тому, как это сделано в § 39 для арккосинуса, можно доказать, что

$$\boxed{\operatorname{arcctg} (\operatorname{ctg} x) = x, \text{ если } 0 < x < \pi.} \qquad (7)$$

При решении уравнений, содержащих котангенс, можно использовать формулу $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ при $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

З а д а ч а 2. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Δ Если x — корень уравнения $\frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, то $\cos x \neq 0$ и $\sin x \neq 0$. Поэтому можно воспользоваться формулой $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ и записать данное уравнение в виде $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$. Отсюда

$$x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \ \blacktriangle$$

Вообще уравнение

$$\operatorname{ctg} x = a \qquad (8)$$

при $a \neq 0$ равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$, и поэтому корнями уравнения при $a \neq 0$ являются числа $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{a} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

З а д а ч а 3. Решить уравнение $(\operatorname{tg} x + 4)(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}) = 0$.

Δ 1) $\operatorname{tg} x + 4 = 0$, $\operatorname{tg} x = -4$, $x = \operatorname{arctg}(-4) + \pi n = -\operatorname{arctg} 4 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

При этих значениях x выражение в первой скобке левой части исходного уравнения обращается в нуль, а во второй не теряет смысла, так как из равенства $\operatorname{tg} x = -4$ следует, что $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{4}$. Следовательно, найденные значения x являются корнями исходного уравнения.

2) $\operatorname{ctg} x - \sqrt{3} = 0$, $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Эти значения x также являются корнями исходного уравнения, так как при этом выражение во второй скобке левой части уравнения равно нулю, а в первой не теряет смысла.

О т в е т. $x = -\operatorname{arctg} 4 + \pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. $\blacktriangle$

З а д а ч а 4. Вычислить $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}\right)$.

Δ По формуле приведения

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}.$$

По формуле (7) находим

$$\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}\right)=\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}\right).$$

Эту задачу можно иначе решить.

Δ По формуле (6) имеем

$$\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}=\frac{\pi}{10}. \blacktriangle$$

Итак, в этом и предыдущих параграфах показано, как решаются простейшие тригонометрические уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

Все другие тригонометрические уравнения с помощью тригонометрических и алгебраических преобразований сводятся к простейшим. В следующих параграфах будут рассмотрены некоторые типы тригонометрических уравнений и способы их решений.

Упражнения

Вычислить (789—793).

789. 1) $\operatorname{arcctg} 1$; 2) $\operatorname{arcctg}(-1)$; 3) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

790. 1) $3\operatorname{arcctg}\sqrt{3}-4\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

2) $2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arcctg} 1$;

3) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3}+2\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arcctg}(-1)$;

4) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

791. 1) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$; 2) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

792. 1) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 1)$; 2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}\sqrt{3})$.

793. 1) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\right)$.

794. Сравнить числа:

1) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$ и $\operatorname{arcctg} 1$;

2) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$ и $\operatorname{arcctg}(-1)$;

3) $\operatorname{arcctg} 1$ и $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$;

4) $\arccos\frac{1}{2}$ и $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решить уравнение (795–801).

795. 1) $\operatorname{ctg} x = -1$; 2) $\operatorname{ctg} x = 1$; 3) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$;

4) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$; 5) $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{9}$; 6) $\operatorname{ctg} x = 7$.

796. 1) $1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{3} = 0$; 2) $\operatorname{ctg} 3x = 0$.

---

797. 1) $2 - \operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; 2) $1 - \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = 0$.

798. 1) $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$; 2) $\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

799. 1) $6 \operatorname{ctg}\left(1 - \frac{x}{4}\right) - 7 = 0$; 2) $5 \operatorname{ctg}\left(1 + \frac{x}{3}\right) + 6 = 0$.

800. 1) $(\operatorname{tg} x - 5)(\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}) = 0$; 2) $(\operatorname{ctg} x + 3)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$.

801. 1) $(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3})\left(2\sin\frac{x}{12} + 1\right) = 0$;

2) $\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{6} + 1\right)(\operatorname{tg} x - 1) = 0$;

3) $\left(2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1\right)(2\operatorname{ctg} x + 1) = 0$;

4) $\left(1 - \sqrt{2}\cos\frac{x}{4}\right)(1 + \sqrt{3}\operatorname{ctg} x) = 0$.

802*. Вычислить:

1) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3}{7}\pi\right)$; 2) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3}{5}\pi\right)$.

803*. Доказать, что если $-1 < a < 1$, то

$$\operatorname{ctg}(\arccos a) = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

§ 41. Уравнения, сводящиеся к квадратным

Рассмотрим тригонометрические уравнения, которые сводятся к квадратным относительно синуса, косинуса или тангенса.

З а д а ч а 1. Решить уравнение $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$.

Δ Это уравнение является квадратным относительно $\sin x$.

Поэтому

$$\sin x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2},$$

откуда $\sin x = 1$ или $\sin x = -2$.

Уравнение $\sin x = 1$ имеет корни $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; уравнение $\sin x = -2$ не имеет корней.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 2. Решить уравнение $2\cos^2 x - 5\sin x + 1 = 0$.

Δ Заменяя $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получаем

$$2(1 - \sin^2 x) - 5\sin x + 1 = 0 \text{ или}$$

$$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0,$$

$$\sin x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4},$$

откуда $\sin x = -3$, $\sin x = \frac{1}{2}$.

Уравнение $\sin x = -3$ не имеет корней, а уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$ имеет следующие корни:

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 3. Решить уравнение $\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0$.

Δ Это уравнение является квадратным относительно $\cos x$, его корни: $\cos x = -1$, $\cos x = 3$. Уравнение $\cos x = -1$ имеет следующие корни: $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, а уравнение $\cos x = 3$ не имеет корней.

Ответ: $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 4. Решить уравнение $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$.

Δ Используя формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, имеем

$$2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0 \text{ или}$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0,$$

откуда $\cos x = -1$, $\cos x = \frac{1}{2}$.

Ответ. $x = \pi + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 5. Решить уравнение $3\,\mathrm{tg}^2\,x + 5\,\mathrm{tg}\,x - 2 = 0$.

Δ Это уравнение является квадратным относительно $\mathrm{tg}\,x$, его корни: $\mathrm{tg}\,x = -2$ и $\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{3}$, откуда получаем две серии корней: $x = -\mathrm{arctg}\,2 + \pi n$, $x = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

О т в е т. $x = -\mathrm{arctg}\,2 + \pi n$, $x = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 6. Решить уравнение $\mathrm{tg}\,x - 2\,\mathrm{ctg}\,x + 1 = 0$.

Δ Так как $\mathrm{ctg}\,x = \frac{1}{\mathrm{tg}\,x}$, то уравнение можно представить в виде

$$\mathrm{tg}\,x - \frac{2}{\mathrm{tg}\,x} + 1 = 0.$$

Умножая обе части уравнения на $\mathrm{tg}\,x$, имеем

$$\mathrm{tg}^2\,x + \mathrm{tg}\,x - 2 = 0,$$

откуда

$$\mathrm{tg}\,x = 1,\ \mathrm{tg}\,x = -2,\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = -\mathrm{arctg}\,2 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Отметим, что левая часть исходного уравнения имеет смысл, если $\mathrm{tg}\,x \neq 0$ и $\mathrm{ctg}\,x \neq 0$. Так как для найденных корней $\mathrm{tg}\,x \neq 0$ и $\mathrm{ctg}\,x \neq 0$, то исходное уравнение равносильно уравнению $\mathrm{tg}^2\,x + \mathrm{tg}\,x - 2 = 0$.

О т в е т. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\mathrm{arctg}\,2 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 7. Решить уравнение $3\cos^2 6x + 8\sin 3x\cos 3x - 4 = 0$.

Δ Используя формулы

$$\sin^2 6x + \cos^2 6x = 1, \qquad \sin 6x = 2\sin 3x\cos 3x,$$

преобразуем уравнение

$$3(1 - \sin^2 6x) + 4\sin 6x - 4 = 0,$$
$$3\sin^2 6x - 4\sin 6x + 1 = 0.$$

Обозначив $\sin 6x = y$, получим уравнение $3y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{3}$.

1) $\sin 6x = 1$, $6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2) $\sin 6x = \frac{1}{3}$, $6x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, $x = \frac{(-1)^n}{6}\arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

О т в е т. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $x = \frac{(-1)^n}{6}\arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Упражнения

Решить уравнение (804–816).

804. 1) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$;
2) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$;
3) $2\sin^2 x + \sin x - 6 = 0$;
4) $3\sin^2 x + 2\sin x - 8 = 0$.

805. 1) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$;
2) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$;
3) $2\cos^2 x + \cos x - 6 = 0$;
4) $3\cos^2 x - 5\cos x - 12 = 0$.

806. 1) $2\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$;
2) $3\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$;
3) $4\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$;
4) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$.

807. 1) $\mathrm{tg}^2 x = 2$;
2) $\mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\, x - 4 = 0$;
3) $\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x + 1 = 0$;
4) $3\,\mathrm{tg}^2 x - 4\,\mathrm{tg}\, x + 5 = 0$.

808. 1) $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{ctg}\, x$;
2) $\mathrm{tg}\, x + 3\,\mathrm{ctg}\, x = 2\sqrt{3}$;
3) $\mathrm{tg}\, x - \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\, x + 1 = \sqrt{3}$;
4) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x = 2 + \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\, x$.

---

809. 1) $\cos 2x + 8\sin x = 3$;
2) $8\cos x = 7 + \cos 2x$;
3) $5\cos 2x + 7\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0$;
4) $2\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + 5\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 4 = 0$.

810. 1) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$;
2) $\cos 4x + 2\sin^2 x = 0$.

811. 1) $\mathrm{ctg}^4 2x + \frac{1}{\sin^4 2x} = 25$;
2) $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{13}{16} + \mathrm{tg}\, x$.

812. 1) $2\cos 2x + 4\cos x = \sin^2 x$;
2) $2\sin^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = 3$.

813. 1) $16\sin^4 x - \cos^2 x = \sin^2 x$;
2) $16\cos^4 x - \sin^2 x = \cos^2 x$.

814. 1) $\sin^4 x + 3\sin^2 x = 4$;
2) $2\cos^4 x + 3\cos^2 x - 2 = 0$.

815. 1) $\cos 2x + 20\cos^2 \frac{x}{2} + 3\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 3$;
2) $2\cos 4x + 3\cos^2 x + \cos 2x = \frac{7}{4}$.

816. 1) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{4}\sin 2x$;
2) $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos x$.

817*. Найти все значения a, при которых уравнение

$$4\sin^2 x + 2(a-3)\cos x + 3a - 4 = 0$$

имеет корни, и решить это уравнение.

818*. Найти все значения a, при которых уравнение

$$4\cos 2x + (2 - 4a)\sin x = a + 3$$

имеет единственный корень на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

§ 42. Уравнения, однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$

Рассмотрим уравнение

$$a \sin x + b \cos x = 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0, \tag{1}$$

которое называют однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$ (1-й степени).

Разделив обе части уравнения (1) на $\cos x$, получим

$$a \operatorname{tg} x + b = 0, \tag{2}$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a},\ x = -\operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

В процессе решения обе части уравнения были разделены на $\cos x$. Поэтому проверим, не являются ли корнями исходного уравнения те значения x, при которых $\cos x$ обращается в нуль. Если $\cos x = 0$, то из уравнения следует, что и $\sin x = 0$, так как $a \neq 0$. Но равенства $\sin x = 0$ и $\cos x = 0$ одновременно выполняться не могут, так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Таким образом, при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) корни не теряются и посторонние корни не появляются, т. е. уравнения (1) и (2) равносильны.

Задача 1. Решить уравнение $\sin x + \cos x = 0$.

Δ Данное уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg} x + 1 = 0$, откуда

$$\operatorname{tg} x = -1,\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ▲

Уравнение

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \tag{3}$$

также называют однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$ (2-й степени).

Если $a \neq 0$, то, разделив обе части уравнения (3) на $\cos^2 x$, имеем равносильное уравнение

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0,$$

которое является квадратным относительно $\operatorname{tg} x$.

Задача 2. Решить уравнение $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

Δ Данное уравнение равносильно уравнению

$$2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, находим

$$\operatorname{tg} x = -1,\ \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}.$$

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ▲

К уравнению (3) сводится уравнение

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x + d = 0.$$

Для этого достаточно воспользоваться основным тригонометрическим тождеством, заменив d на $d(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

З а д а ч а 3. Решить уравнение

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x + 2 = 0.$$

Δ Заменив 2 на $2(\sin^2 x + \cos^2 x)$, запишем уравнение в следующем виде:

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x + 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0,$$

откуда $3 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$.

Разделив обе части этого уравнения на $\cos^2 x$, имеем уравнение

$$3 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1 = 0,$$

равносильное исходному.

Отсюда находим $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} x = -1$.

О т в е т. $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n,\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ▲

З а д а ч а 4. Решить уравнение

$$3 \sin^2 x + \sin 2x + 2 \cos^2 x = 4.$$

Δ Это уравнение равносильно каждому из следующих уравнений:

$$3 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x);$$

$$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0;$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 2 = 0;$$

$$(\operatorname{tg} x - 1)^2 + 1 = 0.$$

Это равенство не выполняется ни при каких значениях $\operatorname{tg} x$, так как $(\operatorname{tg} x - 1)^2 \geqslant 0$. К этому же выводу можно прийти, заметив, что дискриминант квадратного уравнения $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 2 = 0$ отрицателен.

О т в е т. Уравнение не имеет корней. ▲

Упражнения

Решить уравнение (819—822).

819. 1) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 0$; 3) $\sin x = 2 \cos x$;
2) $\cos x = \sin x$; 4) $2 \sin x + \cos x = 0$.

820. 1) $4 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - 6 \cos^2 x = 0$;
2) $3 \sin^2 x - 7 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$;
3) $3 \sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$;
4) $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$.

821. 1) $4\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 10\cos^2 x = 3$;
2) $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$;
3) $2\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 4$;
4) $3\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 1$;
5) $1 - 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$;
6) $1 + \sin^2 x = 2\sin x\cos x$.

---

822. 1) $1 + 7\cos^2 x = 3\sin 2x$;
2) $3 + \sin 2x = 4\sin^2 x$;
3) $\cos 2x + \cos^2 x + \sin x\cos x = 0$;
4) $3\cos 2x + \sin^2 x + 5\sin x\cos x = 0$;
5) $\sin 2x + 2\cos 2x = 1$;
6) $\cos 2x + 3\sin 2x = 3$.

823*. Найти все значения a, при которых уравнение
$$\sin^2 x - \sin x\cos x - 2\cos^2 x = a$$
не имеет корней.

824*. Найти все значения a, при которых уравнение
$$(a^2 + 2)\sin^2 x + 4a\sin x\cos x = a^2 + 3$$
имеет корни, и решить это уравнение.

§ 43. Уравнение, линейное относительно $\sin x$ и $\cos x$

Уравнение
$$a\sin x + b\cos x = c, \qquad (1)$$
где $a \neq 0$, $b \neq 0$, называют линейным относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Покажем на примере, что уравнение (1) можно свести к квадратному относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. При $c = 0$ уравнение является однородным и сводится к уравнению $\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$ (см. § 42).

Задача 1. Решить уравнение
$$4\sin x + 3\cos x = 5.$$

Δ Пользуясь известными формулами и заметив, что $x = 2\cdot\frac{x}{2}$, запишем: $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$, $5 = 5\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)$. Тогда данное уравнение можно представить так:

$$8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+3\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=5\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right),$$

откуда

$$8\sin^2\frac{x}{2}-8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}=0.$$

Полученное уравнение является однородным относительно $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{x}{2}$ и приводится к уравнению

$$4\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-4\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1=0.$$

Отсюда находим $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$.

О т в е т. $x=2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 2. Решить уравнение

$$\sin x-\cos x=1. \qquad (2)$$

Δ Используя формулы двойного угла, так же как и при решении задачи 1, получаем

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2},$$

откуда

$$\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=0.$$

В последнем однородном уравнении коэффициент при $\sin^2\frac{x}{2}$ равен нулю. Поэтому уравнение не сводится к квадратному относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, так как при делении на $\cos^2\frac{x}{2}$ потеряются корни.

Дальнейшее решение можно провести так: $\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)=0$, откуда $\cos\frac{x}{2}=0$ или $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=0$.

1) $\cos\frac{x}{2}=0$, $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\pi+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$;

2) $\sin\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$, $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

О т в е т. $x=\pi+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. ▲

Уравнение (2) можно было иначе решить.

Δ Заметив, что $1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$, запишем уравнение (2) так:

$$\sin x - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cos x = 1,$$

откуда $\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$;

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}. \ \blacktriangle$$

Задача 3. Решить уравнение

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2. \tag{3}$$

Δ Разделим обе части уравнения на 2:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = 1.$$

Заметив, что $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$, представим уравнение так:

$$\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} = 1,$$

откуда

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1;$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}. \ \blacktriangle$$

Покажем, что любое линейное уравнение

$$a \sin x + b \cos x = c, \tag{4}$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, можно решить таким же способом, как и уравнение (3).

$\circ$ Разделим обе части уравнения (4) на $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{5}$$

Так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, то точка с координатами $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ лежит на единичной окружности. Следовательно, существует такое число φ (такой угол φ), что

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Поэтому уравнение (5) можно записать так:

$$\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

откуда

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Последнее уравнение является простейшим тригонометрическим, решение которого известно. ●

Задача 4. Решить уравнение

$$6\sin x-8\cos x=3.$$

Δ Поделим обе части уравнения на $\sqrt{6^2+8^2}=10$. Получим

$$\frac{3}{5}\sin x-\frac{4}{5}\cos x=\frac{3}{10}.$$

Тогда $\cos\varphi=\frac{3}{5}$, $\sin\varphi=-\frac{4}{5}$, поэтому уравнение можно представить так:

$$\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\frac{3}{10};$$

$$\sin(x+\varphi)=\frac{3}{10},$$

откуда

$$x+\varphi=(-1)^n\arcsin\frac{3}{10}+\pi n;$$

$$x=-\varphi+(-1)^n\arcsin\frac{3}{10}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Так как $\cos\varphi=\frac{3}{5}>0$, $\sin\varphi=-\frac{4}{5}<0$, то угол φ лежит в четвертой четверти и поэтому $\varphi=\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)=-\arcsin\frac{4}{5}$.

Ответ. $x=\arcsin\frac{4}{5}+(-1)^n\arcsin\frac{3}{10}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. ▲

Упражнения

Решить уравнение (825–828).

825. 1) $\sin x + \cos x = 1$;

2) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$;

3) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$;

4) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$.

826. 1) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$;

2) $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = 2$.

827. 1) $\sin 3x - \cos 3x = 0{,}5\sqrt{6}$;

2) $\sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x = -\sqrt{3}$.

828. 1) $4\sin\frac{x}{2} + 3\cos\frac{x}{2} = 2$;

2) $12\cos\frac{x}{3} - 5\sin\frac{x}{3} = 1$;

3) $8\sin 3x - 15\cos 3x = 1$;

4) $24\cos\frac{x}{2} + 7\sin\frac{x}{2} = 5$.

829. Найти наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sqrt{6}\cos x + \sqrt{2}\sin x = 2.$$

830. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{3}.$$

831*. Решить уравнение:

1) $\sin^3 x - \cos^3 x + \sin x\cos^2 x - \cos x\sin^2 x = 1$;

2) $\sin^3 x + \cos^3 x + \sin x\cos^2 x + \cos x\sin^2 x = 1$.

832*. Найти все значения a, при которых имеют корни уравнения:

1) $\sin x + a\cos x = 2$;

2) $\cos x + a\sin x = 2$.

§ 44. Решение уравнений методом замены неизвестного

Задача 1. Решить уравнение $\sin 2x - \sin x - \cos x - 1 = 0$.

Δ Выразим $\sin 2x$ через $\sin x + \cos x$, используя тождество:

$$\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1.$$

Обозначим $\sin x + \cos x = t$. Тогда $(\sin x + \cos x)^2 = t^2$, $\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = t^2$, $\sin 2x = t^2 - 1$. Уравнение примет вид $t^2 - t - 2 = 0$, откуда $t_1 = -1$, $t_2 = 2$.

Задача свелась к решению следующих уравнений:

$$\sin x + \cos x = -1, \qquad \sin x + \cos x = 2.$$

Решим первое уравнение:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x+\frac{\pi}{4}=(-1)^k\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k;$$

$$x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k;\quad k\in \boldsymbol{Z}.$$

Отсюда при четном k получаем $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, а при нечетном k $x=\pi+2\pi k$. Второе уравнение не имеет корней, так как $\sin x\leqslant 1$, $\cos x\leqslant 1$ и равенства $\sin x=1$, $\cos x=1$ не могут одновременно выполняться.

Ответ. $x=\pi+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 2. Решить уравнение

$$\sin 2x+3(\sin x-\cos x)=1.$$

Δ Обозначим $\sin x-\cos x=t$. Тогда $(\sin x-\cos x)^2=t^2$, $\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=t^2$, $\sin 2x=1-t^2$. Данное уравнение можно записать так:

$$1-t^2+3t=1.$$

Решая его, находим $t(-t+3)=0$, $t_1=0$, $t_2=3$.

Задача свелась к решению следующих уравнений:

$$\sin x-\cos x=0,\ \sin x-\cos x=3.$$

Решая первое уравнение, получаем

$$\operatorname{tg} x=1,\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Второе уравнение не имеет корней, так как $|\sin x|\leqslant 1$, $|\cos x|\leqslant 1$ и, следовательно $\sin x-\cos x\leqslant 2<3$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задачи 1 и 2 решены с помощью замены неизвестного.

Вообще уравнение

$$a(\sin x+\cos x)+b\sin 2x+c=0,\quad a\neq 0$$

заменой $t=\sin x+\cos x$ сводится к квадратному уравнению

$$at+b(t^2-1)+c=0;$$

уравнение

$$a(\sin x-\cos x)+b\sin 2x+c=0,\quad a\neq 0$$

заменой $t=\sin x-\cos x$ сводится к квадратному уравнению

$$at+b(1-t^2)+c=0.$$

При решении некоторых тригонометрических уравнений бывают полезны замены и других выражений, содержащих неизвестное.

З а д а ч а 3. Решить уравнение

$$\sin x + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 2.$$

Δ Воспользуемся формулами

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \qquad \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Обе эти формулы верны, если $\sin\frac{x}{2} \neq 0$ и $\cos\frac{x}{2} \neq 0$. Заметим, что значения x, при которых $\sin\frac{x}{2} = 0$ или $\cos\frac{x}{2} = 0$, не являются корнями данного уравнения. Поэтому можно сделать замену $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ и свести данное уравнение к виду

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1}{t} = 2.$$

Так как $t \neq 0$, то имеем

$$3t^2 + 1 = 2t + 2t^3;$$
$$2t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 0;$$
$$(2t^3 - 2t^2) - (t^2 - t) + (t - 1) = 0;$$
$$(t - 1)(2t^2 - t + 1) = 0,$$

откуда

$$t - 1 = 0, \quad 2t^2 - t + 1 = 0.$$

Из первого уравнения получаем $t = 1$, а второе не имеет действительных корней.

Если $t = 1$, то $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$, $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

О т в е т. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 4. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = \sin x - \frac{1}{\sin x} + \frac{7}{4}.$$

Δ Пусть $\sin x - \frac{1}{\sin x} = t$; тогда $t^2 = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} - 2$ и уравнение преобразуется к виду $t^2 + 2 = t + \frac{7}{4}$ или $\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, откуда $t = \frac{1}{2}$, т.е.

$$\sin x - \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2}, \qquad 2\sin^2 x - \sin x - 2 = 0,$$

$$\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Уравнение $\sin x = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ не имеет корней, так как $\frac{1+\sqrt{17}}{4} > 1$.

Учитывая, что $-1 < \frac{1-\sqrt{17}}{4} < 1$, из уравнения $\sin x = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$ имеем

$x = (-1)^n \arcsin \frac{1-\sqrt{17}}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

О т в е т. $x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{\sqrt{17}-1}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 5. Решить уравнение

$$\sin\left(x + \frac{3\pi}{5}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{2}\right).$$

∆ Положим $\frac{\pi}{5} - \frac{x}{2} = t$; тогда $x + \frac{3\pi}{5} = \pi - 2\left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{2}\right) = \pi - 2t$ и уравнение примет вид

$$\sin(\pi - 2t) = 2\sin t \quad \text{или} \quad \sin 2t = 2\sin t,$$

или

$$2\sin t\,(\cos t - 1) = 0.$$

Если $\sin t = 0$, то $t = \pi n$, а если $\cos t = 1$, то $t = 2\pi n$. Так как корни второго уравнения содержатся во множестве корней первого уравнения, то $t = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, или $\frac{\pi}{5} - \frac{x}{2} = \pi n$, откуда $x = 2\left(\frac{\pi}{5} + \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}$.

О т в е т. $x = 2\left(\frac{\pi}{5} + \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Упражнения

Решить уравнение (**833–844**).

833. 1) $2\sin 2x - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0$;

2) $\sin 2x + 3 = 3\sin x + 3\cos x$;

3) $\sin 2x + 4(\sin x + \cos x) + 4 = 0$;

4) $\sin 2x + 5(\cos x - \sin x + 1) = 0$;

5) $1 + 2\sin x = \sin 2x + 2\cos x$;

6) $1 + 3\cos x = \sin 2x + 3\sin x$.

834. $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 + \sin 2x$.

835. $\mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{ctg}^2\, x = \mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x$.

836. $\operatorname{tg}^4 2x + \dfrac{1}{\cos^4 2x} = 25.$

837. $2\cos^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x} = 5.$

838. $\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos x} = \cos x - \dfrac{1}{\cos^2 x} = 2.$

839. $\sin\left(2x + \dfrac{12\pi}{7}\right) = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{7}\right).$

840. $\sin\left(2x - \dfrac{16\pi}{9}\right) = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{9}\right).$

841. $\sin^4 x + \cos^6 x = 1.$

842. $\dfrac{\cos 2x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\cos 2x} = 1.$

843. $\sin x + \dfrac{1}{\sin x} = \sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x}.$

844. $\cos^4 x + \sin^8 x = 1.$

845*. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\sin 2x - 2a\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 1 - 6a^2 = 0$$

имеет корни, и решить это уравнение.

§ 45. Решение уравнений методом разложения на множители

Одним из наиболее применяемых методов решения тригонометрических уравнений является метод разложения на множители.

Задача 1. Решить уравнение

$$\sin 2x - \sin x = 0.$$

Δ Используя формулу для синуса двойного аргумента, запишем уравнение в виде $2\sin x \cos x - \sin x = 0$.

Вынося общий множитель $\sin x$ за скобки, получаем

$$\sin x(2\cos x - 1) = 0.$$

1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $2\cos x - 1 = 0$, $\cos x = \dfrac{1}{2}$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $x = \pi n$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 2. Решить уравнение

$$2\sin x\cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0.$$

Δ Вынося общий множитель первого и третьего слагаемых, запишем уравнение в виде

$$2\cos 2x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0$$

или

$$(2\cos 2x - 1)(\sin x + 1) = 0.$$

1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 3. Решить уравнение $\cos 3x + \sin 5x = 0$.

Δ Применяя формулу приведения $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, запишем уравнение в виде

$$\cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0.$$

Используя формулу для суммы косинусов, имеем

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

1) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$, $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{3}{4}\pi + \pi n$;

2) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, $4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{3}{16}\pi + \frac{\pi n}{4}$.

Ответ. $x = \frac{3}{4}\pi + \pi n$, $x = \frac{3}{16}\pi + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 4. Решить уравнение $\sin 7x + \sin 3x = 3\cos 2x$.

Δ Применяя формулу для суммы синусов, запишем уравнение в виде

$$2\sin 5x\cos 2x = 3\cos 2x$$

или

$$\cos 2x\left(\sin 5x - \frac{3}{2}\right) = 0.$$

Уравнение $\cos 2x = 0$ имеет корни $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, а уравнение $\sin 5x = \frac{3}{2}$ не имеет корней.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 5. Решить уравнение $\cos 3x \cos x = \cos 2x$.

Δ Так как $\cos 2x = \cos(3x - x) = \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x$, то уравнение примет вид:

$$\sin x \sin 3x = 0.$$

1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$;

2) $\sin 3x = 0$, $x = \frac{\pi n}{3}$.

Заметим, что числа вида πn содержатся среди чисел вида $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, так как если $n = 3k$, то $\frac{\pi n}{3} = \pi k$. Следовательно, первая серия корней содержится во второй.

О т в е т. $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 6. Решить уравнение

$$\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x.$$

Δ Левая и правая части уравнения имеют общий множитель $\cos x + \sin x$, так как

$$\cos^3 x + \sin^3 x = (\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cos x);$$

$$\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x).$$

Поэтому данное уравнение таково:

$$(\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cos x + \sin x - \cos x) = 0.$$

1) $\cos x + \sin x = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $1 - \sin x \cos x + \sin x - \cos x = 0$.

Заменой $\sin x - \cos x = t$ получаем уравнение $t^2 + 2t + 1 = 0$, откуда $t = -1$, т. е.

$$\sin x - \cos x = -1$$

или

$$\sin x + 1 - \cos x = 0;$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right) = 0.$$

Если $\sin \frac{x}{2} = 0$, то $x = 2\pi n$, а если $\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} = 0$, то $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

О т в е т. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 7. Решить уравнение $\cos x \sin 7x = \cos 3x \sin 5x$.

Δ Выражая произведения тригонометрических функций через суммы, запишем уравнение в виде

$$\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 6x) = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x),$$

откуда

$$\sin 6x - \sin 2x = 0.$$

Используя формулу разности синусов, получаем

$$2 \sin 2x \cos 4x = 0:$$

1) $\sin 2x = 0,\ x = \frac{\pi n}{2}$;

2) $\cos 4x = 0,\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$.

Ответ. $x = \frac{\pi n}{2}$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

Решить уравнение (**846–856**).

846. 1) $\sqrt{3} \sin x \cos x = \sin^2 x$;
2) $2\sin x \cos x = \cos x$;
3) $\sin 4x + \sin^2 2x = 0$;
4) $\sin 2x + 2\cos^2 x = 0$;
5) $\sin 3x = 3 \sin x \cos^2 x$;
6) $\sin 4x = \sin 2x$;
7) $\cos 2x + \cos^2 x = 0$;
8) $\sin 2x = \cos^2 x$.

847. 1) $\cos x = \cos 3x$;
2) $\sin 5x = \sin x$;
3) $\sin 2x = \cos 3x$;
4) $\sin x + \cos 3x = 0$.

848. 1) $\cos x \sin 9x = \cos 3x \sin 7x$;
2) $\sin x \cos 5x = \sin 9x \cos 3x$;
3) $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}$;
4) $\cos x \cos 3x = -\frac{1}{2}$.

---

849. 1) $\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$;
2) $\sin 7x - \sin x = \cos 4x$;
3) $\cos x + \cos 3x = 4 \cos 2x$;
4) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos 4x$.

850. 1) $1 - \sin 5x = \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2$;
2) $2 \sin^2 x = 1 + \frac{1}{3} \sin 4x$;
3) $2\cos^2 2x - 1 = \sin 4x$;
4) $\sin 2x + \cos 5x = 0$;
5) $2\cos^2 2x + 3\cos^2 x = 2$;
6) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \cos x$.

851. 1) $\cos x \cos 2x = \sin x \sin 2x$;
2) $\sin 2x \cos x = \cos 2x \sin x$;
3) $\sin 3x = \sin 2x \cos x$;
4) $\cos 5x \cos x = \cos 4x$;
5) $\cos 3x \cos x = \cos 2x$;
6) $2\cos 2x = \sin x \cos 2x$.

852. 1) $\cos x + \cos 2x + \cos 4x = 0$;

2) $\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x = 0$.

853. 1) $\sin 2x = 1 + \cos 2x + \sqrt{2}\cos x$;

2) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin 3x$.

854. 1) $\operatorname{ctg} x = 1 + 2\cos 2x$; 2) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)} = \cos 2x$.

855. 1) $\cos^2 x = \sin x(1 + \cos 2x)$;

2) $\sin^3 x + \cos^3 x - \sin x - \cos x = 0$.

856*. 1) $\sin 3x = 2\sin 2x$;

2) $\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$.

§ 46. Различные приемы решения тригонометрических уравнений

Задача 1. Решить уравнение

$$3\cos^4 x + 4\sin^4 x = 3.$$

Δ Решить это уравнение можно с помощью формул понижения степени:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

которые получаются из формул половинного угла. Используя эти формулы, имеем

$$3\frac{(1+\cos 2x)^2}{4} + 4\frac{(1-\cos 2x)^2}{4} = 3,$$

$$7\cos^2 2x - 2\cos 2x - 5 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно $\cos 2x$, находим:

1) $\cos 2x = 1$, $2x = 2\pi n$, $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\cos 2x = -\dfrac{5}{7}$, $2x = \pm\arccos\left(-\dfrac{5}{7}\right) + 2\pi n$, $x = \pm\dfrac{1}{2}\left(\pi - \arccos\dfrac{5}{7}\right) + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $x = \pi n$; $x = \pm\dfrac{1}{2}\left(\pi - \arccos\dfrac{5}{7}\right) + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 2. Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Δ Применяя формулы понижения степени, получаем

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Отметим, что $\cos 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\sin 2x$. Поэтому, освобождаясь от дробей, имеем

$$1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\sin 2x+\sin^2 2x=1;$$

$$1+\sin 2x-\cos 2x=0;$$

$$2\sin x\cos x+2\sin^2 x=0;$$

$$\sin x\,(\sin x+\cos x)=0,$$

откуда находим $x=\pi n;\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $x=\pi n;\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 3. Решить уравнение

$$\sin^{10} x+\cos^{10} x=1.$$

△ Решить это уравнение с помощью формул понижения степени непросто. Проще использовать следующие рассуждения.

Известно, что $|\sin x|\leqslant 1$ и $|\cos x|\leqslant 1$. Пусть выполняются строгие неравенства $|\sin x|<1$ и $|\cos x|<1$. Тогда $\sin^2 x<1$, $\cos^2 x<1$ и тем более $\sin^8 x<1$, $\cos^8 x<1$, и поэтому $\sin^8 x<\sin^2 x$, $\cos^8 x<\cos^2 x$. А так как $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ для любого значения x, то $\sin^8 x+\cos^8 x<1$.

Итак, если имеют место строгие неравенства $|\sin x|<1$ и $|\cos x|<1$, то данное уравнение не имеет корней.

Осталось лишь рассмотреть случаи, когда или $|\sin x|=1$, или $|\cos x|=1$, т. е. или $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, или $x=\pi+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. Эти значения и есть корни данного уравнения.

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 4. Решить уравнение

$$2\sin^4 x+3\cos^4 4x=5.$$

△ Так как $|\sin x|\leqslant 1$ и $|\cos 4x|\leqslant 1$, то $\sin^4 x\leqslant 1$ и $\cos^4 4x\leqslant 1$. Если выполняются строгие неравенства, то $2\sin^4 x+3\cos^4 4x<5$ и уравнение не имеет корней. Следовательно, $\sin^4 x=1$ и $\cos^4 4x=1$.

Корнями уравнения $\sin^4 x=1$ являются числа $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$. При этих значениях x верно и второе равенство: $\cos^4 4x=1$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 5. Решить уравнение

$$2 \sin x + 7 \cos 8x = 9.$$

△ Воспользуемся односторонней оценкой значений синуса и косинуса: $\sin x \leqslant 1$ и $\cos 8x \leqslant 1$. Поэтому $2 \sin x \leqslant 2$, $7 \cos 8x \leqslant 7$, откуда $2 \sin x + 7 \cos 8x \leqslant 9$.

Следовательно, уравнение обращается в верное равенство только тогда, когда $\sin x = 1$ и $\cos 8x = 1$. Решая уравнение $\sin x = 1$, получаем $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. При этих значениях x находим $\cos 8x = \cos 8\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \cos(4\pi + 16\pi n) = 1$, т. е. корни уравнения $\sin x = 1$ являются и корнями уравнения $\cos 8x = 1$. Если вместо проверки решить также и уравнение $\cos 8x = 1$, то, получив его корни $x = \frac{\pi k}{4}$, пришлось бы дополнительно устанавливать, какие из них являются корнями уравнения $\sin x = 1$, т. е. не являются посторонними для данного уравнения.

О т в е т. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 6. Решить уравнение

$$\sin x \sin 5x \sin 9x = 1.$$

△ Уравнение может иметь корни только в случае, когда $|\sin x| = 1$.

Если $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, откуда следует, что $\sin 5x = 1$, $\sin 9x = 1$.

Если $\sin x = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и тогда $\sin 5x = -1$, $\sin 9x = -1$ и поэтому $\sin x \sin 5x \sin 9x = -1$.

О т в е т. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 7. Решить уравнение

$$\sin^2 2x + \sin^2 4x = 1 - \frac{\cos 2x}{\cos 3x}.$$

△ Исходное уравнение равносильно каждому из уравнений

$$\frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 8x}{2} = 1 - \frac{\cos 2x}{\cos 3x},$$

$$\frac{\cos 4x + \cos 8x}{2} = \frac{\cos 2x}{\cos 3x}, \ \cos 6x \cos 2x = \frac{\cos 2x}{\cos 3x},$$

а при выполнении условия $\cos 3x \neq 0$ равносильно уравнению

$$\cos 2x(\cos 3x \cdot \cos 6x - 1) = 0.$$

Уравнение $\cos 2x = 0$ имеет корни $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, а уравнение

$\cos 3x \cos 6x = 1$ может имеь крни только в случае, когда $|\cos 3x| = 1$.

Если $|\cos 3x| = 1$, тогда $\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1 = 1$, и поэтому

$\cos 3x \cos 6x = 1$ только тогда, когда $\cos 3x = 1$, откуда $x = \frac{2\pi n}{3}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Упражнения

Решить уравнение (857—864).

857. 1) $8 \sin x \cos x \cos 2x = 1$; 3) $\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \frac{1}{4}$;

2) $1 + \cos^2 x = \sin^4 x$; 4) $\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x = \frac{1}{4}$.

---

858. 1) $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$; 3) $\sin 4x = 6\cos^2 2x - 4$;

2) $\sin^2 x + \cos^2 2x = 1$; 4) $2\cos^2 3x + \sin 5x = 1$.

859. 1) $2\cos^2 2x + 3\sin 4x + 4\sin^2 2x = 0$;

2) $1 - \sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$;

3) $2\sin^2 x + \frac{1}{4}\cos^3 2x = 1$;

4) $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1 + 4\sin x$.

860. 1) $2\cos^2 x = 1 + 4\sin 4x$; 2) $2\sin^2 x = 1 - 3\sin 4x$.

861. 1) $\sin^8 x + \cos^8 x = 1$; 2) $3\sin^6 x + 4\cos^6 x = 7$.

862. 1) $2(\sin^4 x + \cos^4 x) = 6\sin 2x - 5\sin^2 2x$;

2) $8(\sin^5 x \cos x + \cos^5 x \sin x) + 3\sin 2x = 0$.

863. 1) $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = -\frac{3}{8}$;

2) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 + 2\sin^2 x \cos^2 x$.

864. 1) $\sin x \sin 5x = 1$; 3) $\cos x \sin 5x = -1$;

2) $\sin x \cos 4x = -1$; 4) $\sin x \cos 3x = -1$.

865*. Найти все значения a, при которых уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ имеет корни, и решить это уравнение.

866*. Решить уравнение:

1) $\cos x \cos 3x \cos 5x = -1$; 2) $\sin x \sin 3x \sin 7x = 1$.

§ 47. Уравнения, содержащие корни и модули

Задача 1. Решить уравнение

$$\sqrt{1-2\sin 2x} = 2\sin x - \cos x. \qquad (1)$$

Δ Возводя обе части уравнения в квадрат, получаем

$$1 - 2\sin 2x = (2\sin x - \cos x)^2, \qquad (2)$$

откуда

$$1 - 4\sin x\cos x = 4\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x;$$

$$1 - \cos^2 x - 4\sin^2 x = 0;$$

$$\sin^2 x - 4\sin^2 x = 0;$$

$$\sin x = 0, \quad x = \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Напомним, что при возведении обеих частей уравнения в квадрат могут появиться посторонние корни, поэтому необходима проверка.

При $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ левая часть уравнения (1) равна $\sqrt{1-2\sin 2\pi k} = 1$, а правая равна $2\sin \pi k - \cos \pi k = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$. Значение, равное единице, правая часть принимает только при $k = 2n + 1$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Поэтому корнями уравнения (1) являются числа $x = \pi(2n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Отметим, что в данном случае для проверки достаточно было установить, при каких найденных значениях x правая часть уравнения (1) неотрицательна (конечно, если не допущены ошибки в преобразованиях или в вычислениях).

При $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ правая часть положительна, если $k = 2n + 1$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и отрицательна, если $k = 2n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Кроме того, отметим, что знак подкоренного выражения уравнения (1) при найденных значениях x не нужно устанавливать, так как правая часть уравнения (2) неотрицательна и поэтому корнями этого уравнения являются только такие значения x, при которых $1 - 2\sin 2x \geqslant 0$, т. е. подкоренное выражение уравнения (1) неотрицательно.

Ответ. $x = \pi(2n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 2. Решить уравнение

$$\sqrt{7-\cos x - 6\cos 2x} = 4\sin x.$$

Δ Возводя обе части уравнения в квадрат, имеем

$$7 - \cos x - 6\cos 2x = 16\sin^2 x.$$

Используя формулу косинуса двойного угла, это уравнение приводим к квадратному:

$$4\cos^2 x - \cos x - 3 = 0,$$

откуда $\cos x = 1, \cos x = -\frac{3}{4}$.

1) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\cos x = \left(-\frac{3}{4}\right)$, $x = \pm\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Проверим, при каких из найденных значений x правая часть исходного уравнения неотрицательна, т. е. $\sin x \geqslant 0$:

1) при $x = 2\pi n$ получаем $\sin x = 0$;

2) угол $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$ лежит во второй четверти, в которой синус положителен.

Угол $-\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$ лежит в третьей четверти, в которой синус отрицателен.

О т в е т. $x = 2\pi n$, $x = \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 3. Решить уравнение

$$2 - 3\sin^2 x = 2|\cos x|.$$

По определению модуля числа следует рассмотреть два случая:

1) $|\cos x| = \cos x$, если $\cos x \geqslant 0$;

2) $|\cos x| = -\cos x$, если $\cos x < 0$.

Рассмотрим *первый случай*. При $\cos x \geqslant 0$ имеем

$$2 - 3\sin^2 x = 2\cos x;$$

$$3\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0;$$

$$\cos x = 1, \cos x = -\frac{1}{3}.$$

Второе значение не годится, так как $\cos x \geqslant 0$. Из уравнения $\cos x = 1$ находим $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Во *втором случае*, т. е. если $\cos x < 0$, имеем

$$2 - 3\sin^2 x = -2\cos x;$$

$$3\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0;$$

$$\cos x = -1, \cos x = \frac{1}{3}.$$

Второе значение положительно, т. е. не удовлетворяет условию $\cos x < 0$. Из уравнения $\cos x = -1$ находим $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Объединяя формулы $x = 2\pi k$ и $x = \pi + 2\pi k$, получаем $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

О т в е т. $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 4. Решить уравнение

$$4-2\cos^2 x=5|\sin x|.$$

Δ 1) $\sin x\geqslant 0$;

$$4-2\cos^2 x=5\sin x;$$
$$2\sin^2 x-5\sin x+2=0;$$
$$\sin x=2,\ \sin x=\frac{1}{2}.$$

Уравнение $\sin x=2$ не имеет корней;

$\sin x=\frac{1}{2}>0,\ x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$

2) $\sin x<0$;

$$4-2\cos^2 x=-5\sin x;$$
$$2\sin^2 x+5\sin x+2=0;$$
$$\sin x=-2,\ \sin x=-\frac{1}{2}.$$

Уравнение $\sin x=-2$ не имеет корней;

$\sin x=-\frac{1}{2}<0,\ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$

О т в е т. $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$ или $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,$ $n\in \boldsymbol{Z}$. ▲

Упражнения

Решить уравнение (**867–874**).

867. 1) $\sqrt{\cos 2x}=\sin x$; 2) $\sqrt{1-\sin x}=2\cos x$.

868. 1) $\sqrt{2}\cos x=-\sqrt{3\sin x}$; 2) $\sqrt{\cos 2x}=1+2\sin x$.

869. 1) $|\sin x|=\sin x+2\cos x$; 3) $|2\operatorname{tg} x-8|=3\operatorname{tg} x+1$;

2) $|3\sin x-5|=2$; 4) $2|\cos x|-\cos x-3=0$.

---

870. 1) $\sqrt{\sin 2x}=\sqrt{\cos x-\sin x-1}$;

2) $\sqrt{4+3\cos x-\cos 2x}=\sqrt{6}\sin x$.

871. 1) $\sqrt{\frac{3}{2}+\cos^2 x}=\sin x-\cos x$;

2) $\sqrt{\sin 3x-\sin x}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x$.

872. 1) $\sqrt{5\cos x-\cos 2x}=-2\sin x$;

2) $\sqrt{\cos x+\cos 3x}=-\sqrt{2}\cos x$;

3) $\sqrt{3(1-\operatorname{tg}^2 x)} = 2\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$;

4) $\sqrt{\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x} = \frac{1}{\cos x}$.

873*. 1) $4\,|\cos x| + 3 = 4\sin^2 x$; 2) $|\operatorname{tg} 2x| + 1 = \frac{1}{\cos^2 2x}$.

874.** 1) $\sqrt{5+\cos 2x} = \sin x + 3\cos x$;

2) $\frac{(\sqrt{3}+1)\sin 3x + \sin 5x}{|\sin x|} = \sqrt{3}$.

§ 48. Системы тригонометрических уравнений

Задача 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$$

Δ Из первого уравнения следует, что $\sin x \neq 0$ и $\cos y \neq 0$. Поэтому, умножая почленно второе уравнение на первое, имеем систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{2}, \\ \cos x \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Складывая и вычитая почленно уравнения этой системы, получаем

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = 1, \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \sin(x-y) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x+y = 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x-y = \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, находим $x = \pi n + \frac{\pi k}{2}$, $y = \pi n - \frac{\pi k}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $x = \pi n + \frac{\pi k}{2}$, $y = \pi n - \frac{\pi k}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Отметим, что в записи решения целые числа n и k могут быть как одинаковыми, так и разными. Употребление только одного обозначения целого числа (только n или только k) привело бы к потере корней.

З а д а ч а 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin y = 5\sin x, \\ \cos y = 2 - 3\cos x. \end{cases}$$

Δ Возведем обе части уравнения в квадрат и сложим полученные уравнения. Отсюда имеем

$$25 \sin^2 x + (2 - 3 \cos x)^2 = 1,$$

откуда

$$8 \cos^2 x + 6 \cos x - 14 = 0;$$

$$\cos x = 1 \quad \text{или} \quad \cos x = -\frac{7}{4}.$$

Уравнение $\cos x = -\frac{7}{4}$ не имеет корней.

Из уравнения $\cos x = 1$ находим $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Подставляя эти значения x в исходную систему, получаем

$$\begin{cases} \sin y = 0, \\ \cos y = -1, \end{cases}$$

откуда $y = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

О т в е т. $(2\pi n; \pi + 2\pi k)$, $n, k \in \mathbf{Z}$. ▲

З а д а ч а 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{3}\sin 2y, \\ \cos x = \sin y. \end{cases}$$

Δ Возведем оба уравнения в квадрат и сложим полученные уравнения:

$$\begin{array}{l} \sin^2 x = \frac{1}{9} \sin^2 2y, \\ + \\ \cos^2 x = \sin^2 y \\ \hline 1 = \sin^2 y + \frac{1}{9} \sin^2 2y \end{array},$$

откуда

$$\cos^2 y = \frac{1}{9} \cdot 4 \sin^2 y \cos^2 y;$$

$$\cos^2 y \left(1 - \frac{4}{9}\sin^2 y\right) = 0;$$

$$\cos^2 y\left(\frac{9}{4}-\sin^2 y\right)=0.$$

Так как $|\sin y|\leqslant 1$, то $\frac{9}{4}-\sin^2 y\neq 0.$

Следовательно, $\cos^2 y=0$, $y=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Рассмотрим два случая: k — четное и k — нечетное числа.

1) Если $k=2n$, то, подставляя $y=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ в исходную систему, имеем

$$\begin{cases}\sin x=0,\\ \cos x=1,\end{cases}$$

откуда $x=2\pi l$, $l\in \boldsymbol{Z}$.

2) Если $k=2n+1$, то, подставляя $y=\frac{\pi}{2}+\pi+2\pi n$ в исходную систему, получаем

$$\begin{cases}\sin x=0,\\ \cos x=-1,\end{cases}$$

откуда $x=\pi+2\pi l$, $l\in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\left(2\pi l;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $\left(\pi+2\pi l;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $l, n\in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sin y=3\sin x,\\ \cos y+2\cos x=1.\end{cases}$$

△ Для исключения неизвестного y из данной системы преобразуем второе уравнение, возведем оба уравнения в квадрат и почленно их сложим:

$$\begin{cases}\sin y=3\sin x,\\ \cos y=1-2\cos x,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2 y=9\sin^2 x,\\ \cos^2 y=1-4\cos x+4\cos^2 x;\end{cases}$$

$$1=9\sin^2 x+1-4\cos x+4\cos^2 x,$$

откуда

$$9-9\cos^2 x-4\cos x+4\cos^2 x=0;$$

$$5\cos^2 x + 4\cos x - 9 = 0;$$

$$\cos x = 1,\ \cos x = -\frac{9}{5}.$$

1) $\cos x = 1,\ x = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\cos x = -\frac{9}{5} < -1$, корней нет.

Подставляя $\cos x = 1$ во второе уравнение исходной системы, находим

$$\cos y = -1,\quad y = \pi + 2\pi k,\quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Так как в ходе решения системы уравнения возводились в квадрат, необходима проверка.

Найденные решения удовлетворяют второму уравнению системы, так как оно было использовано для нахождения значений y при найденных значениях x.

Проверяем первое уравнение: его левая часть равна

$$\sin(\pi + 2\pi k) = 0,$$

правая часть

$$3\sin(2\pi k) = 0.$$

Посторонних корней нет.

Ответ. $x = 2\pi n,\ y = \pi + 2\pi k,\ n \in \boldsymbol{Z},\ k \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Упражнения

Решить систему уравнений (875–887).

875. 1) $\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(x-y) = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \cos(x+y) = 0, \\ \cos(x-y) = 1. \end{cases}$

876. 1) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ x + y = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

877. $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

878. $\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1. \end{cases}$

879. $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{2}, \\ \cos x \sin y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

880. $\begin{cases} 3\cos x\cos y+7\sin x\sin y=4, \\ 5\cos x\cos y-3\sin x\sin y=3. \end{cases}$

881. $\begin{cases} \cos\pi x\cos\pi y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ y-x=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

882. $\begin{cases} 4\sin x-2\sin y=3, \\ 2\cos x-\cos y=0. \end{cases}$

883. $\begin{cases} 4\sin\pi x\sin\pi y=1, \\ 4\cos\pi x\cos\pi y=3. \end{cases}$

884. $\begin{cases} \sin x=\dfrac{1}{\sin x}+\sin y, \\ \cos x=\dfrac{1}{\cos x}+\cos y. \end{cases}$

885. $\begin{cases} \cos x-\sin x=1+\cos y-\sin y, \\ 3\sin 2x-2\sin 2y=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

886*. $\begin{cases} \operatorname{ctg}^4 2x+32\sin^2 y=55, \\ \dfrac{1}{\sin^2 2x}-4\cos y=5. \end{cases}$

887*. $\begin{cases} \left|\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\sin y-\cos y, \\ \sin 2y+2\sin 2x=\dfrac{3}{4}+2\sin^3 2x. \end{cases}$

§ 49. Появление посторонних корней и потеря корней тригонометрического уравнения

При решении тригонометрических уравнений (как и при решении иррациональных или логарифмических уравнений) некоторые преобразования не приводят данное уравнение к равносильному ему. Например, при возведении обеих частей уравнения в квадрат получается уравнение — следствие данного, т. е. могут появиться посторонние корни. При умножении обеих частей уравнения на выражения, содержащие неизвестное, также могут появиться посторонние корни, а при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное, может произойти потеря корней.

Если в процессе решения уравнения получается уравнение — следствие данного, надо проверить, не появились ли посторонние корни. Потерю корней обнаружить труднее. Поэтому преобразования уравнения, которые могут привести к потере его корней, нужно проводить осторожно.

Рассмотрим случаи приобретения посторонних корней или потери корней при решении тригонометрических уравнений.

Задача 1. Решить уравнение

$$2 \operatorname{tg} x \sin \frac{x}{3} + 4 \sin \frac{x}{3} - \operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Δ Способом группировки разложим левую часть уравнения на множители

$$(\operatorname{tg} x + 2)\left(2\sin\frac{x}{3} - 1\right) = 0.$$

1) $\operatorname{tg} x + 2 = 0$, $\operatorname{tg} x = -2$, $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $2 \sin \frac{x}{3} - 1 = 0$, $\sin \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$, $\frac{x}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + 3\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Так как левая часть данного уравнения содержит $\operatorname{tg} x$, который не имеет смысла при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то необходимо проверить, не появились ли в связи с этим посторонние корни. Выполним проверку:

1) если $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то $\operatorname{tg} x$ существует и левая часть данного уравнения не теряет смысла;

2) если $x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + 3\pi n$, то $\operatorname{tg} x$ не существует и левая часть исходного уравнения не имеет смысла.

Ответ. $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 2. Решить уравнение

$$\frac{2\sin 3x + \sin 5x}{\sin x} + 1 = 0.$$

Δ Пусть $\sin x \neq 0$, т. е. $x \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Умножая обе части уравнения на $\sin x$, получаем

$$2 \sin 3x + \sin 5x + \sin x = 0.$$

Используя формулу суммы синусов, имеем

$$2 \sin 3x + 2 \sin 3x \cos 2x = 0;$$

$$\sin 3x\,(1 + \cos 2x) = 0.$$

1) $\sin 3x = 0$, $3x = \pi k$, $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

2) $1 + \cos 2x = 0$, $\cos 2x = -1$, $2x = \pi + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Так как при решении уравнения обе его части умножались на $\sin x$, возможно появление посторонних корней. Выполним проверку:

1) если $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то $\sin x = 0$ при $k = 3n$, т. е. при $x = \pi n$, но $\sin x \neq 0$ при $k \neq 3n$, т. е. при $k = 3n + 1$ и при $k = 3n + 2$;

2) если $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то $\sin x \neq 0$.

О т в е т. $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $x = \frac{2\pi}{3} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 3. Решить уравнение

$$\frac{2 - \cos x}{\cos x} = 2.$$

Δ Пусть $\cos x \neq 0$. Тогда

$$2 - \cos x = 2 \cos x;$$

$$\cos x = \frac{2}{3};$$

$$x = \pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Выполним проверку. Если $x = \pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi n$, то $\cos x = \frac{2}{3} \neq 0$.

О т в е т. $x = \pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 4. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x}.$$

Δ Так как $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, то, умножая обе части уравнения на произведение $\sin x \cos x \neq 0$, получаем

$$\sin^2 x = \sin x \cos x - \cos^2 x,$$

откуда

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \sin x \cos x;$$

$$\sin x \cos x = 1;$$

$$2 \sin x \cos x = 2;$$

$$\sin 2x = 2.$$

Последнее уравнение является следствием исходного. Оно не имеет корней, следовательно, и исходное уравнение не имеет корней.

О т в е т. Корней нет. ▲

З а д а ч а 5. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \cos x.$$

Δ Возводя обе части уравнения в квадрат, имеем

$$\frac{1+\cos x}{2} = \cos^2 x,$$

откуда

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0, \cos x = 1, \cos x = -\frac{1}{2}.$$

1) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Так как при решении обе части уравнения возводились в квадрат, то выполним проверку: выясним, при каких из найденных значений x правая часть исходного уравнения неотрицательна.

Если $x = 2\pi n$, то $\cos x = 1 > 0$; если $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, то $\cos x = -\frac{1}{2} < 0$.

О т в е т. $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Рассмотрим теперь примеры уравнений, при решении которых может быть потеря корней.

З а д а ч а 6. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x = \sin 2x.$$

Δ Запишем это уравнение так:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 2\sin x \cos x.$$

Пусть $\cos x \neq 0$, тогда

$$\sin x = 2\sin x\cos^2 x;$$

$$\sin x\,(1 - 2\cos^2 x) = 0.$$

1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $1 - 2\cos^2 x$, $2\cos^2 x = 1$, $1 + \cos 2x = 1$, $\cos 2x = 0$, $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Проверка показывает, что в обоих случаях $\cos x \neq 0$.

О т в е т. $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Замечание. Если обе части исходного уравнения

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 2 \sin x \cos x$$

разделить на $\sin x$, т. е. перейти к уравнению

$$\frac{1}{\cos x} = 2 \cos x,$$

то будут потеряны корни уравнения $\sin x = 0$, т. е. $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Задача 7. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x - \sin x = 1 - \cos x.$$

Δ Представим это уравнение так:

$$\operatorname{tg} x - 1 = \sin x - \cos x;$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} - 1 = \sin x - \cos x.$$

Если $\cos x \neq 0$, то

$$\sin x - \cos x = \cos x (\sin x - \cos x);$$

$$\sin x - \cos x - \cos x (\sin x - \cos x) = 0;$$

$$(\sin x - \cos x)(1 - \cos x) = 0.$$

1) $\sin x - \cos x = 0$, $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $1 - \cos x = 0$, $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Проверка показывает, что в обоих случаях $\cos x \neq 0$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Отметим, что если промежуточное уравнение

$$\sin x - \cos x - \cos x (\sin x - \cos x) = 0$$

разделить на разность $\sin x - \cos x$, то будут потеряны корни $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Задача 8. Решить уравнение

$$4 \cos x + \sin 2x = 4 + 2 \sin x.$$

Δ Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$4 \cos x + 2 \sin x \cos x = 4 + 2 \sin x;$$

$$\cos x (2 + \sin x) = 2 + \sin x.$$

Заметим, что $2 + \sin x \neq 0$, т. е. $\sin x \neq -2$, при любом значении x. Поэтому не произойдет потери корней, если обе части уравнения разделить на $(2 + \sin x)$. Получим

$$\cos x = 1, \ x = 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ. $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 9. Решить уравнение

$$\sin x - 2\cos x = 2.$$

Δ Воспользуемся формулами

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Однако эти формулы следует осторожно применять, так как они не при всех значениях x верны. Эти формулы верны, если $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ существует, т. е. $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, $x \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Поэтому требуется проверить, не являются ли значения $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ корнями исходного уравнения. Проверка показывает, что эти значения x и есть корни исходного уравнения. Запомним это.

При других значениях x можно использовать эти формулы для решения уравнения. Применяя формулы и заменяя $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, имеем

$$\frac{2t}{1+t^2} - \frac{2(1-t^2)}{1+t^2} = 2.$$

Так как $1 + t^2 \neq 0$, то

$$2t - 2(1 - t^2) = 2(1 + t^2);$$

$$t - 1 + t^2 = 1 + t^2;$$

$$t = 2,\ \text{т. е. } \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2;$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ x = 2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

О т в е т. $x = \pi + 2\pi n$, $x = 2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 10. Решить уравнение

$$2\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Δ Воспользуемся формулами

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x},\ \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

Эти формулы верны при $x \neq \frac{\pi k}{2}$, $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Проверим, не являются ли $x = \frac{\pi k}{2}$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ корнями исходного уравнения. Проверка показывает, что $x = \frac{\pi k}{2}$ являются корнями исходного уравнения только при $k = 1 + 2n$, т. е. при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, так как при $k = 2n$ $\operatorname{ctg} x$ не существует; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ не являются корнями исходного уравнения, так как при этих значениях не существует $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Запомним это и продолжим решение.

Применяя формулы и заменяя $\operatorname{tg} x = t$, получаем

$$\frac{2}{t} - \frac{1+t}{1-t} = 1.$$

В ходе предварительной проверки получилось, что если $t = \operatorname{tg} x \neq 0$ и $t = \operatorname{tg} x \neq 1$, то

$$2 - 2t - t - t^2 = t - t^2;$$

$$t = \frac{1}{2}, \text{ т. е. } \operatorname{tg} x = \frac{1}{2},\ x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Итак, рассмотренные примеры показывают, что при решении тригонометрических уравнений могут появиться посторонние корни, если:

1) уравнение содержит тангенс или котангенс;

2) обе части уравнения умножаются (или делятся) на выражение, содержащее неизвестное;

3) обе части уравнения возводятся в квадрат.

Потеря корней при решении тригонометрических уравнений может произойти, если:

1) обе части уравнения делятся (или умножаются) на выражение, содержащее неизвестное;

2) используются тригонометрические формулы, которые справедливы не при всех значениях неизвестного;

3) при решении системы тригонометрических уравнений для обозначения целого числа в найденных значениях x и y употребляется только одна буква.

Упражнения

Решить уравнение (888–895).

888. $\dfrac{2\cos 3x+\cos 5x}{\cos x}+1=0.$

889. $\dfrac{\cos 2x}{\cos x}=\dfrac{\sin 2x}{\sin x}.$

890. $\operatorname{tg} 2x=3\operatorname{tg} x.$

891. $\operatorname{ctg} x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=2.$

892. $\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-2\operatorname{ctg} x=1.$

893. $\dfrac{\cos 3x}{|\cos x|}+\dfrac{2\cos x}{\cos 3x}=-1.$

894. $\sqrt{7-\cos x-6\cos 2x}=4\sin x.$

895. $\sqrt[4]{\dfrac{5+3\cos 4x}{8}}=\sin x.$

Упражнения к главе VII

896. Вычислить:

1) $2\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}+3\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$;

2) $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}}-4\arcsin 1$;

3) $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)-\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\arccos(-1)-\arcsin(-1)$;

5) $2\operatorname{arctg} 1+3\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

6) $4\operatorname{arctg}(-1)+3\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

Решить уравнение (897–906).

897. 1) $\cos(4-2x)=-\dfrac{1}{2}$;

2) $\cos(6+3x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sqrt{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1=0$;

4) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-3x\right)-\sqrt{3}=0.$

898. 1) $2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1=0$;

2) $1-\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$;

3) $3+4\sin(2x+1)=0$;

4) $5\sin(2x-1)-2=0.$

899. 1) $(1+\sqrt{2}\cos x)(1-4\sin x\cos x)=0$;

2) $(1-\sqrt{2}\cos x)(1+2\sin 2x\cos 2x)=0$.

900. 1) $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$;

2) $\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt{3}-\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=0$;

4) $1-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=0$.

901. 1) $2\sin^2 x+\sin x=0$;

2) $3\sin^2 x-5\sin x-2=0$;

3) $\cos^2 x-2\cos x=0$;

4) $6\cos^2 x+7\cos x-3=0$.

902. 1) $6\sin^2 x-\cos x+6=0$;

2) $8\cos^2 x-12\sin x+7=0$.

903. 1) $\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x=0$;

2) $2\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x-3=0$;

3) $\operatorname{tg} x-12\operatorname{ctg} x+1=0$;

4) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2$.

904. 1) $2\sin 2x=3\cos 2x$;

2) $4\sin 3x+5\cos 3x=0$.

905. 1) $5\sin x+\cos x=5$;

2) $4\sin x+3\cos x=6$.

906. 1) $\sin 3x=\sin 5x$;

2) $\cos x=\cos 3x$;

907. 1) $\cos^2 3x-\cos 3x\cos 5x=0$;

2) $\sin x\sin 5x-\sin^2 5x=0$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найти значение выражения:

1) $\arccos 1+\arcsin 0$;

2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\sqrt{3})$;

4) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. Решить уравнение:

1) $\sin 3x\cos x-\sin x\cos 3x=1$;

2) $2\cos^2 x+5\cos x=3$;

3) $\operatorname{tg} x-3\operatorname{ctg} x=0$;

4) $\sin 3x-\sin x=0$;

5) $2\sin x+\sin 2x=0$.

Вычислить (**908–909**).

908. 1) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

2) $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$;

3) $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$;

4) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

5) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$;

6) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

909. 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$; 4) $\sin\left(\pi+\arcsin\frac{2}{3}\right)$;

2) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$; 5) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;

3) $\sin\left(\pi-\arcsin\frac{3}{4}\right)$; 6) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{5}\right)$.

Решить уравнение (910—927).

910. 1) $\sin 2x+2\cos 2x=1$; 2) $\cos 2x+3\sin 2x=3$.

911. 1) $3\operatorname{tg}^4 x-10\operatorname{tg}^2 x+3=0$; 3) $\operatorname{ctg} x\left(\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin x}\right)=1$;

2) $3\operatorname{tg} x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$; 4) $\sin^4 x=1+\cos^4 x$.

912. 1) $\sin^2 x+\sin^2 2x=1$; 2) $13\sin^2 x+\cos 4x-2=\cos 2x$.

913. 1) $8\sin^4 x+13\cos 2x=7$; 2) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=3+2\sin 2x$.

914. 1) $\operatorname{tg} x\,(3\operatorname{ctg} x-16\sin x\cos^3 x)=0$;

2) $2\operatorname{tg} x+\frac{1}{\sin x}=\frac{2}{\sin 2x}$.

915. 1) $3\sin^2 x+\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$;

2) $2\sin^2 x+3\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$.

916. 1) $1+2\sin x=\sin 2x+2\cos x$;

2) $1+3\cos x=\sin 2x+3\sin x$.

917. 1) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1+\cos 2x$;

2) $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x$.

918. 1) $\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x=\frac{1}{4}$;

2) $\sin^3 x\cos x+\cos^3 x\sin x=\frac{1}{4}$.

919. 1) $\sin^2 x+\sin^2 2x=1$; 3) $\sin 4x=6\cos^2 2x-4$;

2) $\sin^2 x+\cos^2 2x=1$; 4) $2\cos^2 3x+\sin 5x=1$.

920. 1) $\sin^2 x-\cos x\cos 3x=\frac{1}{4}$;

2) $\sin 3x=3\sin x$;

3) $3\cos 2x-7\sin x=4$;

4) $1+\cos x+\cos 2x=0$;

5) $\cos 4x-\sin 2x=1$;

6) $5\sin 2x+4\cos^3 x-8\cos x=0$.

921. 1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 7x$;

2) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;

3) $\sin x - \sin 3x = \sin 2x - \sin 4x$;

4) $\cos x - \cos 3x = \cos 2x - \cos 4x$.

922. $\sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

923. $\sin^2 2x + \sin^2 3x = \sin^2 4x + \sin^2 5x$.

924. $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$.

925. $\dfrac{6\sqrt{3}}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = 4 - \cos 4x$.

926. $\sqrt{-4\cos x \cos 2x} = \sqrt{7\sin 2x}$.

927. $|\cos x| - \cos 3x = \sin 2x$.

Решить систему уравнений (928—929).

928. 1) $\begin{cases} \cos x \sin y = \dfrac{1}{2}, \\ \sin 2x \sin 2y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ \cos x - \cos y = \sqrt{3}. \end{cases}$

929. 1) $\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{5}{3}, \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x + \cos x = 2 + \sin y - \cos y, \\ 2\sin 2x - \sin 2y = 1. \end{cases}$

Решить уравнение (930–938).

930*. $4 \sin 3x \sin 4x = \cos x (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x)$.

931*. $\cos x - 2 \cos 3x + \cos 5x = \operatorname{tg} x \cos 3x$.

932.** 1) $\dfrac{\sin 2x}{\sin x} = 0$; 2) $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} = 0$; 3) $\dfrac{\cos 2x}{\cos x} = 0$;

4) $\dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 0$; 5) $\dfrac{\sin x}{\sin 5x} = 0$; 6) $\dfrac{\cos x}{\cos 7x} = 0$.

933.** 1) $\sin x \sin 5x = 1$; 3) $\cos x \sin 5x = -1$;

2) $\sin x \cos 4x = -1$; 4) $\sin x \cos 3x = -1$.

934*. $\dfrac{\sin 3x}{\cos 2x} + \dfrac{\cos 3x}{\sin 2x} = \dfrac{2}{\sin 3x}$.

935*. $\dfrac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{3\sin x + \cos 2x} = \operatorname{ctg} 2x$.

936*. $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{\sin 3x} = 2 \cos 2x$.

937*. $\sqrt{5\operatorname{tg} x + 10} = \dfrac{5}{2} \sin x + \dfrac{1}{\cos x}$.

938*. $\dfrac{\sin 4x}{4\sin x - \sin 3x} = \cos x$.

939*. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} + 6\sin x = 2\sin(y - x), \\ \operatorname{tg}\dfrac{y}{2} - 2\sin x = 6\sin(y + x); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{1 + \sin x \sin y} = \cos x, \\ 2\sin x \operatorname{ctg} y + 1 = 0. \end{cases}$

940*. Найти все значения a, при которых уравнение $\sin^{10} x + \cos^{10} x = a$ имеет корни.

Историческая справка

Очевидно, что еще древнегреческие математики, используя элементы тригонометрии для решения прямоугольных треугольников, фактически составляли и решали простейшие тригонометрические уравнения типа: $\sin x = a$, где $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ и $|a| < 1$.

Исторически учение о решении тригонометрических уравнений формировалось параллельно с развитием теории тригонометрических функций, а также черпало из алгебры общие методы их решения. Как мы видим, часть тригонометрических уравнений непосредственно решается сведением их к простейшему виду, иногда — с предварительным разложением левой части уравнения на множители, когда правая часть равна нулю. В некоторых случаях удается произвести замену неизвестных таким образом, что тригонометрическое уравнение преобразуется в «удобное» для решения алгебраическое уравнение. Иногда удается решить тригонометрическое уравнение, анализируя его левую и правую части. Например, для решения уравнения $\sin^4 x + \cos^4 x = \sqrt{2}$ следует понять, что $\sin^4 x \leqslant \sin^2 x$, $\cos^4 x \leqslant \cos^2 x$, т. е. $\sin^4 x + \cos^4 x \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, а так как $1 < \sqrt{2}$, то уравнение не имеет решений. Многие тригонометрические уравнения в традиционном понимании вообще неразрешимы, и для них можно лишь указать метод приближенного решения. Такое часто, например, происходит, когда в уравнении неизвестная величина встречается и под знаком тригонометрической функции, и вне ее (примером такого уравнения может быть $x^2 - \sin x + 2x = 0$).

К сожалению, нельзя указать общего метода решения тригонометрических уравнений, почти каждое из них (кроме простейших) требует особого подхода.

ГЛАВА VIII

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В этой главе будут рассмотрены основные свойства и графики тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Напомним, что при изучении различных функций (линейной, квадратичной, степенной и т. д.) выяснились такие их свойства, как область определения, множество значений, возрастание или убывание, наибольшие и наименьшие значения, промежутки знакопостоянства, четность или нечетность, нули (корни) функции (точки пересечения графика функции с осью абсцисс).

Для тригонометрических функций, кроме этих свойств, характерно свойство периодичности.

§ 50. Периодичность тригонометрических функций

Вы знаете, что для любого значения x верны равенства

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Из этих равенств следует, что значения синуса и косинуса повторяются при изменении аргумента на 2π. Такие функции называют *периодическими с периодом* 2π.

Функция $f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения этой функции выполняется равенство

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Число T называют *периодом* функции $f(x)$.

Из этого определения следует, что вместе с каждым x значения $x + T$ и $x - T$ также входят в область определения периодической функции $f(x)$. Поэтому все точки $x + kT$, $k \in \boldsymbol{Z}$ также принадлежат области определения, и в этих точках значения функции равны, т.е. $f(x + kT) = f(x)$.

На рисунке 77 изображены графики некоторых периодических функций.

Периодическими функциями описываются многие физические процессы (колебание маятника, вращение планет, переменный ток и пр.).

Покажем, что *число* 2π *является наименьшим положительным периодом функции* $y = \cos x$.

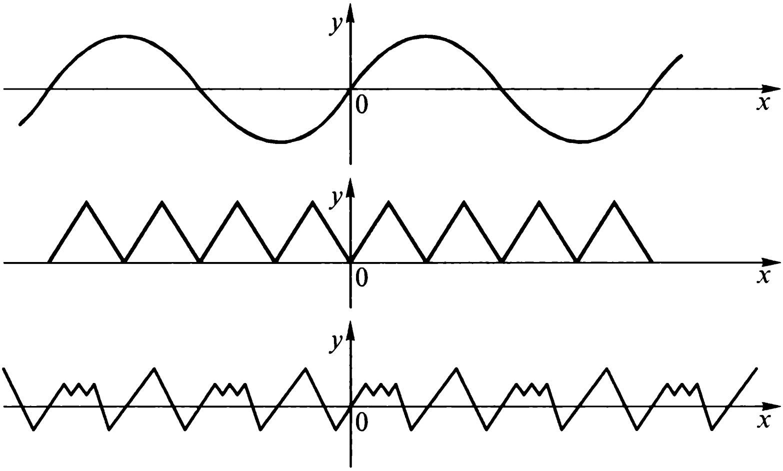


Рис. 77

○ Пусть $T > 0$ — период косинуса, т. е. для любого x выполняется равенство $\cos(x + T) = \cos x$. Положив $x = 0$, получаем $\cos T = 1$. Отсюда $T = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Так как $T > 0$, то T может принимать значения 2π, 4π, 6π, ... и поэтому период не может быть меньше 2π. ●

Можно доказать, что *наименьший положительный период функции* $y = \sin x$ также *равен* 2π.

Задача 1. Доказать, что $f(x) = \sin 3x$ — периодическая функция с периодом $\frac{2\pi}{3}$.

Δ Если функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, то для того, чтобы убедиться в том, что она является периодической с периодом T, достаточно показать, что для любого x верно равенство $f(x \pm T) = f(x)$. Данная функция определена для всех $x \in \boldsymbol{R}$ и $f\left(x \pm \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3\left(x \pm \frac{2\pi}{3}\right) = \sin(3x - 2\pi) = \sin 3x = f(x)$. ▲

Покажем, что функция $\operatorname{tg} x$ является периодической с периодом π. Если x принадлежит области определения этой функции, т. е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то по формулам приведения имеем

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = -\operatorname{tg}(\pi - x) = -(-\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x, \ \operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x.$$

Таким образом, $\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi)$. Следовательно, π — период функции $\operatorname{tg} x$.

Покажем, что π — *наименьший положительный период функции* $\operatorname{tg} x$.

○ Пусть T — период тангенса, тогда $\operatorname{tg}(x+T)=\operatorname{tg} x$, откуда при $x=0$ получаем

$$\operatorname{tg} T=0,\ T=\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

Так как наименьшее целое положительное число k равно 1, то π — наименьший положительный период функции $\operatorname{tg} x$. ●

Задача 2. Доказать, что $\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$ — периодическая функция с периодом 3π.

Δ Так как $\operatorname{tg}\dfrac{x+3\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{3}+\pi\right)=\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$, $\operatorname{tg}\dfrac{x-3\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{3}-\pi\right)=\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$, то $\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$ — периодическая функция с периодом 3π. ▲

Задача 3. Найти наименьший положительный период функции $y=\cos\dfrac{3x}{7}$.

Δ Пусть $T>0$ — период этой функции, т. е. для любого значения x выполняется равенство $\cos\dfrac{3(x+T)}{7}=\cos\dfrac{3x}{7}$. Положив $x=0$, имеем $\cos\dfrac{3T}{7}=1$, откуда $\dfrac{3T}{7}=2\pi k$, $T=\dfrac{14\pi k}{3}$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Среди этих чисел наименьшее положительное число получается при $k=1$. Проверим, что число $\dfrac{14\pi}{3}$ является периодом данной функции:

$$\cos\left[\frac{3}{7}\left(x+\frac{14\pi}{3}\right)\right]=\cos\left(\frac{3x}{7}+2\pi\right)=\cos\frac{3x}{7}.$$

Ответ. $\dfrac{14\pi}{3}$. ▲

Аналогично тому, как это было сделано при решении задач **1—3**, можно доказать более общее утверждение: если функция $y=f(x)$ периодическая с периодом T, то функция $y=cf(ax+b)$, где $a\neq 0$, является периодической с периодом $T_1=\dfrac{T}{a}$.

Например, функция $y=3\operatorname{ctg}(5x-4)$ является периодической с периодом $T=\dfrac{\pi}{5}$, так как функция $y=\operatorname{ctg} x$ периодическая с периодом π.

Упражнения

941. На рисунке 78 на отрезке [0; 2] построен график периодической функции с периодом $T = 2$. Построить график этой функции на отрезке [−2; 6]:

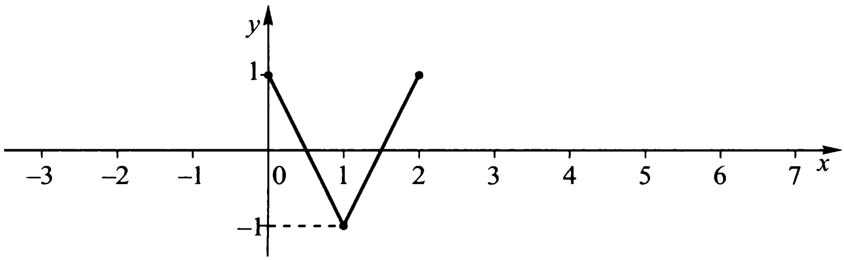


Рис. 78

942. На рисунке 79 на отрезке $\left[-\frac{1}{2}T;\ \frac{1}{2}T\right]$ построены графики периодических функций с периодом T. Построить графики этих функций на отрезке $\left[-\frac{3}{2}T;\ \frac{5}{2}T\right]$.

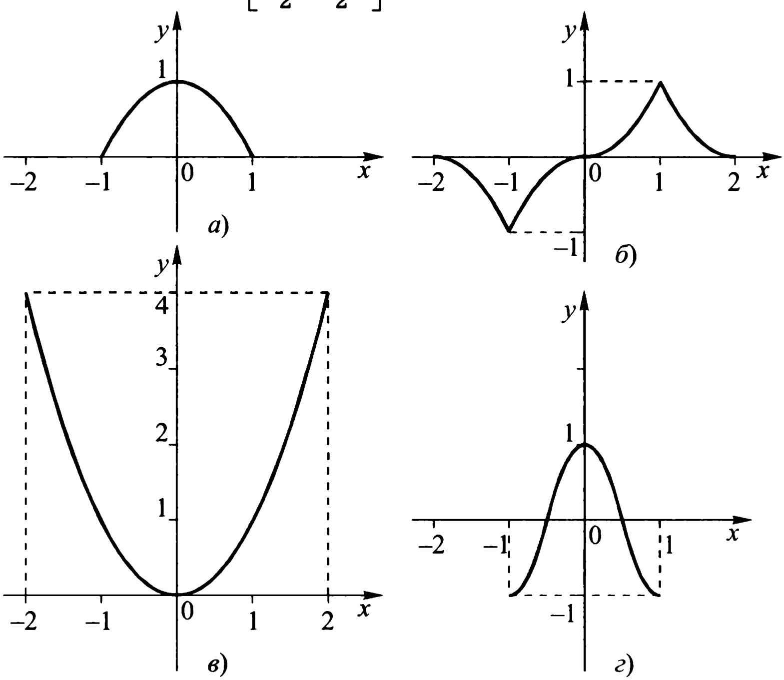


Рис. 79

943. Доказать, что данная функция является периодической с периодом 2π:

1) $y = \cos x - 1$; 2) $y = \sin x + 1$; 3) $y = 3 \sin x$;

4) $y = \frac{\cos x}{2}$; 5) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 6) $y = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

944. Доказать, что данная функция является периодической с периодом T, если:

1) $y = \sin 2x$, $T = \pi$; 3) $y = \operatorname{tg} 2x$, $T = \frac{\pi}{2}$;

2) $y = \cos \frac{x}{2}$, $T = 4\pi$; 4) $y = \sin \frac{4x}{5}$, $T = \frac{5}{2}\pi$.

Найти наименьший положительный период функции (**945—946**).

945. 1) $y = \cos \frac{2}{5}x$; 3) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;

2) $y = \sin \frac{3}{2}x$; 4) $y = |\sin x|$.

946.** 1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$.

§ 51. Функция $y = \sin x$, ее свойства и график

Функция $y = \sin x$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 2π. Поэтому подсчет значений этой функции для любого аргумента можно свести к вычислению ее значений для аргумента, принадлежащего какому-нибудь отрезку длиной 2π, например отрезку $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

В § 34 было отмечено, что с помощью формул приведения подсчет значений этой функции для любого аргумента можно свести к вычислению ее значений для аргумента от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Следовательно, весь график функции $y = \sin x$ можно построить с помощью части графика, построенного на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Покажем, как последовательно строится график этой функции: сначала на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, затем на отрезках $[0; \pi]$, $[-\pi; \pi]$ и, наконец, на всей числовой прямой.

1. График функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Докажем, что *функция* $y = \sin x$ *возрастает на отрезке* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

○ Пусть x_1 и x_2 — любые два числа, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и удовлетворяющие неравенству $x_1 < x_2$, т. е. $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$. Требуется доказать, что $\sin x_1 < \sin x_2$.

Рассмотрим разность $\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_1}{2}$. Так как $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \frac{x_2 + x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$. Поэтому $\sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$ и $\cos \frac{x_2 + x_1}{2} > 0$. Следовательно, $\sin x_2 - \sin x_1 > 0$, т. е. $\sin x_1 < \sin x_2$. ●

Для построения графика функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ составим таблицу ее значений:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = \sin x$	0	$0{,}5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$	1

Построим найденные точки и проведем через них кривую, учитывая, что на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает (рис. 80).

Для более точного построения графика нужно составить более подробную таблицу, находя значения синуса еще для некоторых значений аргумента, например, по таблицам В.М. Брадиса.

Приближенно значения функции $y = \sin x$ можно геометрически находить и затем строить график этой функции. Поясним этот способ построения графика функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Построим окружность радиуса 1 с центром в точке A оси абсцисс, лежащую левее оси ординат (рис. 81). Разделим первую четверть этой окружности, например, на 8 равных частей и через точки деления проведем прямые, параллельные оси абсцисс. Отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ оси абсцисс также разделим на 8 равных частей и из точек деления восстановим перпендикуляры к ней до пересечения с соответствующими прямыми, проведенными параллельно оси абсцисс так, как показано на рисунке 81. Построенные точки пересечения прямых по определению синуса числа являются точками графика функции $y = \sin x$. Проведем через эти точки кривую, учитывая, что функция $y = \sin x$ возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, получим график этой функции на данном отрезке (см. рис. 81).

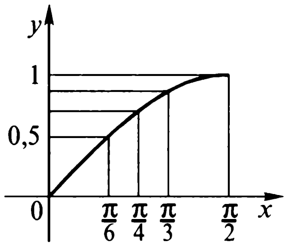


Рис. 80

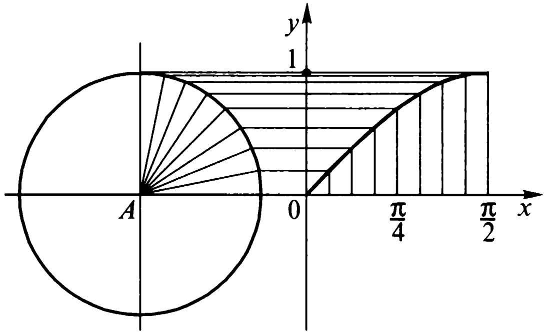


Рис. 81

2. График функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$

Докажем, что *график функции $y = \sin x$ симметричен относительно прямой* $x = \frac{\pi}{2}$, т. е. прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку $\frac{\pi}{2}$ оси абсцисс.

○ Надо доказать, что для любых двух точек a и b, лежащих на оси абсцисс и симметричных относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$, выполняется равенство $\sin a = \sin b$.

Пусть расстояние от точек a и b до прямой $x = \frac{\pi}{2}$ равно α. Тогда $a = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $b = \frac{\pi}{2} + \alpha$ (рис. 82) и по формулам приведения $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. ●

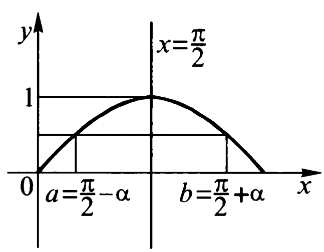


Рис. 82

Для построения графика функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$ сначала построим его часть на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (см. рис. 80). Затем эту часть графика отобразим симметрично относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$. Получим график функции на отрезке $[0; \pi]$ (см. рис. 82).

3. График функции $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$

В § 30 было показано, что функция $y = \sin x$ — нечетная, поэтому ее график симметричен относительно начала координат.

Для построения графика функции $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ построим сначала его часть на отрезке $[0; \pi]$ (см. рис. 82). Затем для каждой точки $M(x_0; y_0)$ полученной части построим точку $M(-x_0; -y_0)$, симметричную относительно начала координат, и получим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 83).

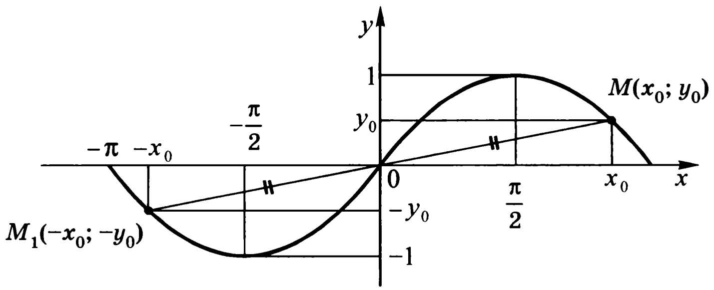


Рис. 83

4. График функции $y = \sin x$ на всей числовой прямой

В § 50 было показано, что функция $y = \sin x$ является периодической с периодом 2π, т. е. для любого x выполняется равенство $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Отсюда следует, что $\sin(x + 4\pi) = \sin x$, $\sin(x - 2\pi) = \sin x$ и вообще $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$ для $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$ и любого x. Следовательно, график функции $y = \sin x$ периодически повторяется с периодом 2π, т. е. на отрезках $[\pi; 3\pi]$, $[3\pi; 5\pi]$, $[-3\pi; -\pi]$ и т.д. график такой же, как и на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 84).

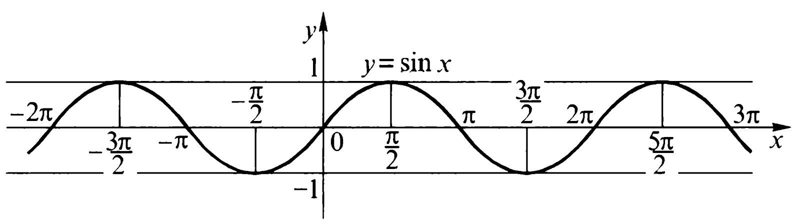


Рис. 84

Кривая, являющаяся графиком функции $y = \sin x$, называется *синусоидой*.

Итак, весь график функции $y = \sin x$ построен геометрически, исходя из его части на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, свойства функции $y = \sin x$ можно получить из построенного графика, опираясь на свойства этой функции на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Например, из рисунка 82 видно, что функция $y = \sin x$ положительна на полуинтервале $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, равна нулю при $x = \pi$ и убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Из рисунка 83 видно, что функция $y = \sin x$ возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Из рисунка 84 видно, что функция $y = \sin x$ возрастает на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$, убывает на отрезках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Перечислим основные свойства функции $y = \sin x$.

5. Основные свойства функции $y = \sin x$

1. *Область определения* — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

2. *Множество значений* — отрезок $[-1; 1]$.

3. Функция $y = \sin x$ — *периодическая с периодом* 2π, т. е. $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

4. Функция $y = \sin x$ — *нечетная*, т. е. $\sin(-x) = -\sin x$.

5. Функция $y = \sin x$:

возрастает на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

убывает на отрезках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

6. Функция $y = \sin x$ принимает:

наибольшее значение, равное 1, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

наименьшее значение, равное -1, при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

значение, равное нулю, при $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Задача 1. Разбить отрезок $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ на два так, чтобы на одном из них функция $y = \sin x$ убывала, а на другом — возрастала.

Δ Из рисунка 84 видно, что при увеличении аргумента от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ значения функции $y = \sin x$ уменьшаются от 1 до -1. При увеличении аргумента x от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π значения функции $y = \sin x$ увеличиваются от -1 до 0.

Ответ. На отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ убывает, а на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ — возрастает. ▲

Задача 2. Сравнить числа $\sin 2$ и $\sin 3$.

△ Так как $\pi \approx 3{,}14$, $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, то $\frac{\pi}{2} < 2 < 3 < \pi$.

Из рисунка 84 видно, что на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ функция $y = \sin x$ убывает. Следовательно, $\sin 2 > \sin 3$. ▲

Задача 3. Найти все числа x на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, для которых выполняется неравенство: $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

△ На отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ убывает (см. рис. 84) и принимает значение $\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x = \frac{3\pi}{4}$. Следовательно, неравенство $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ выполняется при $\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$. ▲

Задача 4*. Построить графики функций:

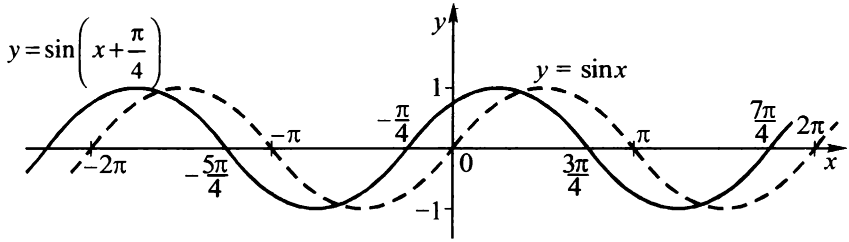
1) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
2) $y = 2 + \sin x$;
3) $y = 2 \sin x$;
4) $y = \sin 2x$.

△ 1) График функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ получается сдвигом графика функции $y = \sin x$ вдоль оси абсцисс влево на $\frac{\pi}{4}$ ед. (см. рис. 85, *а*).

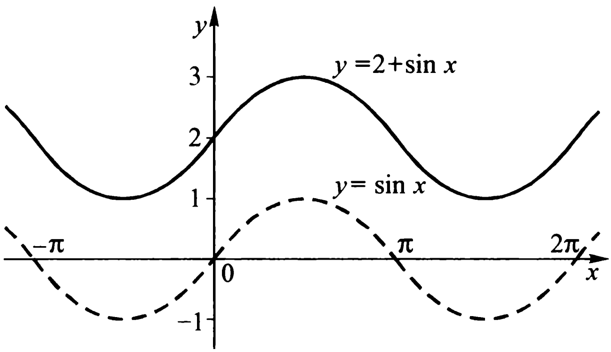
2) График функции $y = 2 + \sin x$ получается сдвигом графика функции $y = \sin x$ вдоль оси ординат вверх на 2 ед. (см. рис. 85, *б*).

3) График функции $y = 2 \sin x$ получается растяжением графика функции $y = \sin x$ вдоль оси ординат от оси абсцисс в 2 раза (см. рис. 85, *в*).

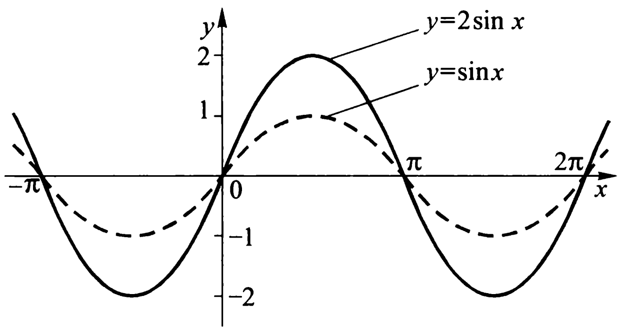
4) График функции $y = \sin 2x$ получается сжатием графика функции $y = \sin x$ вдоль оси абсцисс к оси ординат в 2 раза (см. рис. 85, *г*). ▲


$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
$y = \sin x$
y
x
1
−1
0
-2π
$-\frac{5\pi}{4}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{4}$
π
$\frac{7\pi}{4}$
2π

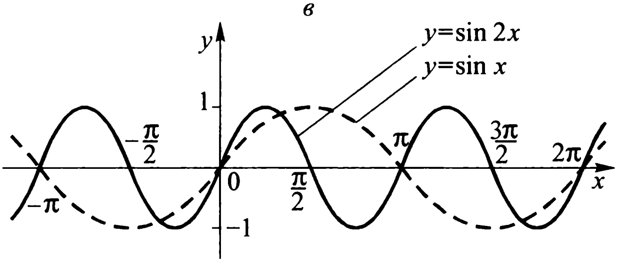
а


$y = 2 + \sin x$
$y = \sin x$
y
x
3
2
1
−1
0
$-\pi$
π
2π

б


$y = 2\sin x$
$y = \sin x$
y
x
2
1
−1
−2
0
$-\pi$
π
2π

в


$y = \sin 2x$
$y = \sin x$
y
x
1
−1
0
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π

г

Рис. 85

Упражнения

Пользуясь графиком функции $y = \sin x$, выполнить упражнения **(947–954)**.

947. (*Устно.*) Выяснить, при каких значениях x, принадлежащих отрезку $[0; 3\pi]$, функция $y = \sin x$ принимает значения:

1) равные 0; 1; -1; 2) положительные; 3) отрицательные.

948. (*Устно.*) Выяснить, возрастает или убывает функция $y = \sin x$ на промежутках:

1) $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; 3) $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$;

4) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 5) $[2; 4]$; 6) $(6; 7)$.

949. Разбить данный отрезок на два так, чтобы на одном из них функция $y = \sin x$ возрастала, а на другом убывала:

1) $[0; \pi]$; 2) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$; 3) $[-\pi; 0]$; 4) $[-2\pi; -\pi]$.

950. Используя свойство возрастания или убывания функции $y = \sin x$, сравнить числа:

1) $\sin \frac{7\pi}{10}$ и $\sin \frac{13\pi}{10}$; 5) $\sin 3$ и $\sin 4$;

2) $\sin \frac{13\pi}{7}$ и $\sin \frac{11\pi}{7}$; 6) $\sin 7$ и $\sin 6$;

3) $\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$ и $\sin\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$; 7) $\sin(-3)$ и $\sin(-2)$;

4) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$; 8) $\sin(-1)$ и $\sin(-1{,}5)$.

951. Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 3) $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$;

2) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

---

952. Выражая косинус через синус по формулам приведения, сравнить числа:

1) $\sin \frac{\pi}{9}$ и $\cos \frac{\pi}{9}$; 3) $\sin \frac{\pi}{5}$ и $\cos \frac{5\pi}{14}$;

2) $\sin \frac{9\pi}{8}$ и $\cos \frac{9\pi}{8}$; 4) $\sin \frac{\pi}{8}$ и $\cos \frac{3\pi}{10}$.

953. Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $-\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$:

1) $\sin 2x \geqslant -\frac{1}{2}$;
3) $\sin \frac{x}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}$;
2) $\sin 3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;
4) $\sin \frac{x}{3} \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

954. Построить график функции и выяснить ее свойства:

1) $y = 1 - \sin x$;
5) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
2) $y = 2 + \sin x$;
6) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;
3) $y = \sin 3x$;
7) $y = \sin(x - 2)$;
4) $y = 2\sin x$;
8) $y = \sin(x + 4)$.

955*. Найти множество значений функции $y = \sin x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[\frac{\pi}{6}; \pi\right]$; 2) $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$; 3) $\left[-\frac{2}{3}\pi; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{11}{6}\pi\right]$.

956.** Построить график функции:

1) $y = \sin|x|$;
3) $y = \sin\left|x - \frac{\pi}{3}\right|$;
2) $y = |\sin x|$;
4) $y = \left|\sin\frac{x}{2}\right|$.

957.** Сила переменного электрического тока — функция, зависящая от времени, выражается формулой

$$J = A\sin(\omega t + \varphi),$$

где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза. Построить графики этой функции, если:

1) $A = 2$, $\omega = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$;
2) $A = 1$, $\omega = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

§ 52. Функция $y = \cos x$, ее свойства и график

Функция $y = \cos x$ определена на всей числовой прямой, четная и периодическая с периодом 2π. Ее график можно построить таким же способом, каким в § 51 был построен график функции $y = \sin x$. Однако проще воспользоваться следующей формулой приведения:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Эта формула позволяет построить график функции $y = \cos x$ и получить ее свойства из графика функции $y = \sin x$ и свойств этой функции.

1. График функции $y = \cos x$

Покажем, что *график функции $y = \cos x$ получается из графика функции $y = \sin x$ сдвигом вдоль оси абсцисс влево на* $\frac{\pi}{2}$ (рис. 86).

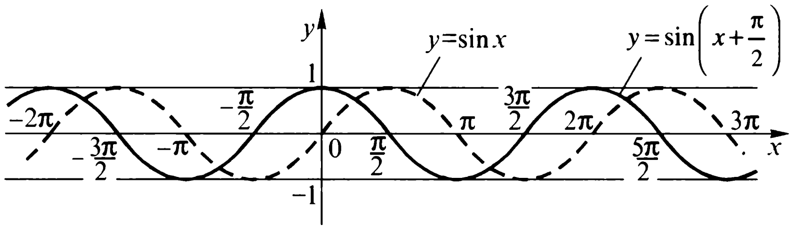


Рис. 86

○ Рассмотрим любую точку x_0 оси абсцисс. Точка $x_0 + \frac{\pi}{2}$ лежит правее точки x_0 на $\frac{\pi}{2}$. Надо доказать, что значение функции $y = \cos x$ в точке x_0 равно значению функции $y = \sin x$ в точке $x_0 + \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 86). По формуле приведения имеем $\cos x_0 = \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right)$. ●

График функции $y = \cos x$ изображен на рисунке 87. Перечислим основные свойства этой функции.

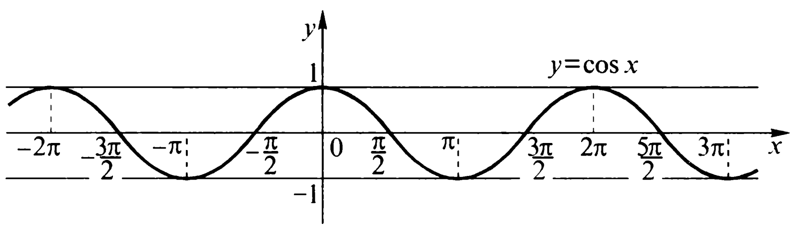


Рис. 87

2. Основные свойства функции $y = \cos x$

1. *Область определения — множество **R** всех действительных чисел.*

2. *Множество значений* — отрезок $[-1; 1]$.

3. Функция $y = \cos x$ — *периодическая с периодом* 2π, т. е. $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

4. Функция $y = \cos x$ — *четная*, т. е. $\cos(-x) = \cos x$.

5. Функция $y = \cos x$:

возрастает на отрезках $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

убывает на отрезках $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

6. Функция $y = \cos x$ принимает:

наибольшее значение, равное 1, при $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

наименьшее значение, равное -1, при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

значение, равное 0, при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

З а д а ч а 1. Выражая синус через косинус по формуле приведения, сравнить числа $\cos\frac{\pi}{7}$ и $\sin\frac{3\pi}{8}$.

Δ По формуле приведения $\sin\frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}$. Числа $\frac{\pi}{8}$ и $\frac{\pi}{7}$ принадлежат отрезку $[0; \pi]$ и $\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{7}$. Из рисунка 87 видно, что функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $[0; \pi]$. Следовательно, $\cos\frac{\pi}{8} > \cos\frac{\pi}{7}$, т. е. $\sin\frac{3\pi}{8} > \cos\frac{\pi}{7}$. ▲

З а д а ч а 2. Найти все решения неравенства $\cos x > -\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $-\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Δ Из рисунка 88 видно, что график функции $y = \cos x$ лежит выше графика функции $y = -\frac{1}{2}$ на промежутках $\left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ и $\left(\frac{4\pi}{3}; 2\pi\right]$.

О т в е т. $-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3} < x \leqslant 2\pi$. ▲

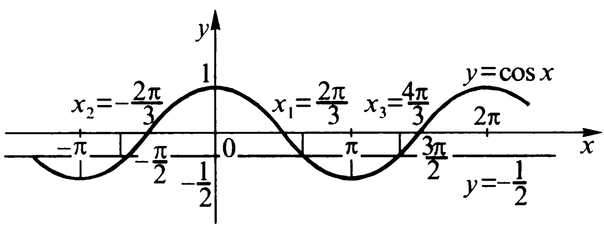


Рис. 88

З а д а ч а 3. Найти область определения функции

$$y = \frac{1}{\sin x + \cos x}.$$

Δ Найдем значения x, при которых выражение $\frac{1}{\sin x + \cos x}$ не имеет смысла, т. е. значения x, при которых знаменатель равен нулю. Решая уравнение $\sin x + \cos x = 0$, находим $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Следовательно, областью определения данной функции являются все значения $x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ▲

З а д а ч а 4. Найти множество значений функции
$$y = 3 + \sin x \cos x.$$

Δ Нужно выяснить, какие значения может принимать y при разных значениях x, т. е. установить, для каких значений a уравнение $3 + \sin x \cos x = a$ имеет корни. Применяя формулу синуса двойного угла, запишем уравнение так: $3 + \frac{1}{2}\sin 2x = a$, откуда $\sin 2x = 2a - 6$. Это уравнение имеет корни, если $|2a - 6| \leqslant 1$, т. е. если $-1 \leqslant 2a - 6 \leqslant 1$, откуда $5 \leqslant 2a \leqslant 7$, т.е. $2{,}5 \leqslant a \leqslant 3{,}5$. Следовательно, множеством значений данной функции является промежуток $2{,}5 \leqslant y \leqslant 3{,}5$. ▲

З а д а ч а 5*. Построить график функции
$$y = -3 \cos (x - 1).$$

Δ График функции $y = -3\cos(x - 1)$ можно получить из графика функции $y = \cos x$ следующими преобразованиями:

1) сдвигом вдоль оси абсцисс вправо на 1 ед.;

2) растяжением графика функции $y = \cos(x - 1)$ вдоль оси ординат от оси абсцисс в 3 раза;

3) симметричным отображением графика функции $y = 3\cos(x - 1)$ относительно оси абсцисс (рис. 89). ▲

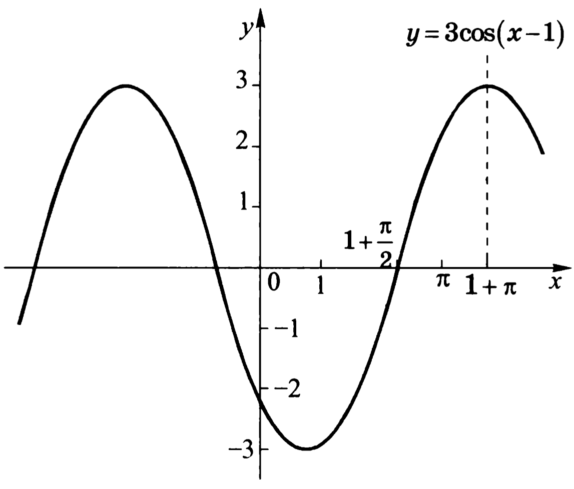


Рис. 89

Упражнения

Пользуясь графиком функции $y = \cos x$, выполнить упражнения (958–962).

958. (*Устно.*) Выяснить, при каких значениях x, принадлежащих отрезку $[0; 3\pi]$, функция $y = \cos x$ принимает значения:

1) равные 0; 1; −1; 2) положительные; 3) отрицательные.

959. (*Устно.*) Выяснить, возрастает или убывает функция $y = \cos x$ на отрезке:

1) $[3\pi; 4\pi]$; 2) $[-2\pi; -\pi]$; 3) $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$;

4) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; 5) $[1; 3]$; 6) $[-2; -1]$.

960. Разбить данный отрезок на два так, чтобы на одном из них функция $y = \cos x$ возрастала, а на другом — убывала:

1) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 3) $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

961. Используя свойство возрастания или убывания функции $y = \cos x$, сравнить числа:

1) $\cos \frac{\pi}{7}$ и $\cos \frac{8\pi}{9}$; 4) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$;

2) $\cos \frac{8\pi}{7}$ и $\cos \frac{10\pi}{7}$; 5) $\cos 1$ и $\cos 3$;

3) $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; 6) $\cos 4$ и $\cos 5$.

962. Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

1) $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$; 3) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos x \geqslant -\frac{1}{2}$; 4) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

963. Найти область определения функции:

1) $y = \sin 2x$; 2) $y = \cos \frac{x}{2}$; 3) $y = \cos \frac{1}{x}$;

4) $y = \sin \frac{2}{x}$; 5) $y = \sin \sqrt{x}$; 6) $y = \cos \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

964. Найти множество значений функции:

1) $y = 1 + \sin x$; 4) $y = 1 - 4\cos 2x$;

2) $y = 1 - \cos x$; 5) $y = \sin 2x \cos 2x + 2$;

3) $y = 2\sin x + 3$; 6) $y = \frac{1}{2}\sin x \cos x - 1$.

965. Выражая синус через косинус по формулам приведения, сравнить числа:

1) $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\sin\frac{\pi}{5}$; 4) $\sin\frac{3\pi}{5}$ и $\cos\frac{3\pi}{5}$;

2) $\sin\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{\pi}{7}$; 5) $\cos\frac{\pi}{6}$ и $\sin\frac{5\pi}{14}$;

3) $\cos\frac{5\pi}{8}$ и $\sin\frac{5\pi}{8}$; 6) $\cos\frac{\pi}{8}$ и $\sin\frac{3\pi}{10}$.

966. Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$:

1) $\cos 2x<\frac{1}{2}$; 2) $\cos 3x>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

967*. Построить график функции и выяснить ее свойства:

1) $y=1+\cos x$; 4) $y=3\cos x$;

2) $y=\cos x-2$; 5) $y=\cos 3x-1$;

3) $y=\cos 2x$; 6) $y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

968*. Найти множество значений функции $y=\cos x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$; 2) $\left(\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right)$.

Найти область определения функции (**969–970**).

969*. 1) $y=\sqrt{\sin x+1}$; 4) $y=\sqrt{1-2\sin x}$;

2) $y=\sqrt{\cos x-1}$; 5) $y=\lg\sin x$;

3) $y=\sqrt{2\cos x-1}$; 6) $y=\ln\cos x$.

970*. 1) $y=\frac{1}{2\sin^2 x-\sin x}$; 3) $y=\frac{1}{\sin x-\sin 3x}$;

2) $y=\frac{2}{\cos^2 x-\sin^2 x}$; 4) $y=\frac{1}{\cos^3 x+\cos x}$.

971*. Найти множество значений функции:

1) $y=2\sin^2 x-\cos 2x$; 4) $y=10-9\sin 3x$;

2) $y=1-8\cos^2 x\sin^2 x$; 5) $y=1-2|\cos x|$;

3) $y=\frac{1+8\cos^2 x}{4}$; 6) $y=\sin x+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

972.** Построить график функции:

1) $y=|\cos x|$; 2) $y=3-2\cos(x-1)$.

§ 53. Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, их свойства и графики

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена на всей числовой прямой, кроме точек $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, нечетная и периодическая с периодом π. Построим последовательно график этой функции: сначала на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, затем на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и, наконец, на всей области определения.

1. График функции $y = \operatorname{tg} x$ на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Докажем, что *функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на полуинтервале* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

○ Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$. Тогда $0 \leqslant \sin x_1 < \sin x_2$, $\cos x_1 > \cos x_2 > 0$. Следовательно, $\operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2} = \operatorname{tg} x_2$, т.е. $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$. ●

Составим таблицу значений функции $y = \operatorname{tg} x$ для нескольких значений x из полуинтервала $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$y = \operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58$	1	$\sqrt{3} \approx 1{,}7$

Построим найденные точки и проведем через них кривую, учитывая, что на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает (рис. 90).

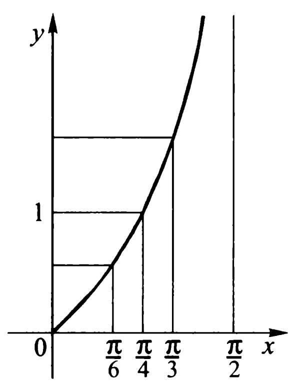


Рис. 90

Для более точного построения графика надо составить более подробную таблицу, находя значение функции $y = \operatorname{tg} x$ еще для нескольких значений аргумента, например, по таблицам В.М. Брадиса или на микрокалькуляторе.

Отметим, что если x приближается к $\frac{\pi}{2}$ и $x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x$ приближается к 1, а

$\cos x$ приближается к 0 и $\cos x > 0$. При этом $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ неограниченно возрастает (рис. 90).

2. График функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$

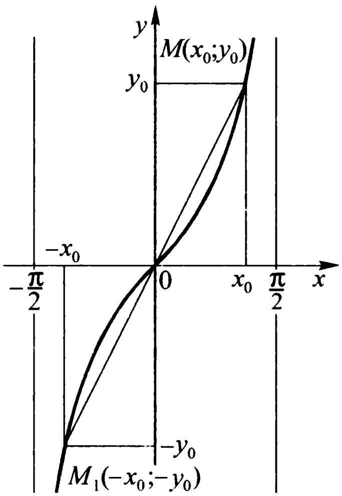


Рис. 91

В § 30 было показано, что функция $y = \operatorname{tg} x$ — нечетная. Поэтому ее график симметричен относительно начала координат.

Для построения графика функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ изобразим сначала его часть на полуинтервале $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (см. рис. 90). Затем для каждой точки $M(x_0; y_0)$ полученной части построим точку $M_1(-x_0; -y_0)$, симметричную относительно начала координат. Получим график функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (рис. 91).

3. График функции $y = \operatorname{tg} x$ на всей области определения

В § 50 было показано, что функция $y = \operatorname{tg} x$ — периодическая с периодом π. Следовательно, весь график этой функции получается из его части на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (см. рис. 91) сдвигом вдоль оси абсцисс вправо и влево на πn, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 92).

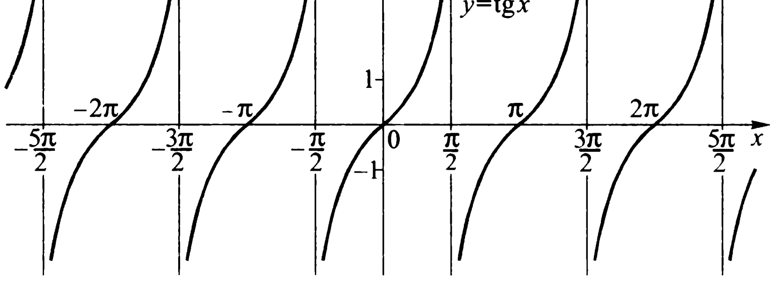


Рис. 92

Итак, весь график функции $y = \operatorname{tg} x$ строится геометрически, исходя из его части на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ можно получить из ее графика. Например, из рисунка 91 следует, что функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а из рисунка 92 видно, что эта функция возрастает на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Перечислим основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

4. Основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$

1. *Область определения* — множество всех действительных чисел, кроме чисел $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2. *Множество значений* — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

3. Функция $y = \operatorname{tg} x$ — *периодическая с периодом* π.

4. Функция $y = \operatorname{tg} x$ — *нечетная*, т. е. $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

5. Функция $y = \operatorname{tg} x$ *возрастает* на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

6. Функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает *значение, равное* 0, при $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

5. Функция $y = \operatorname{ctg} x$

По формуле приведения $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Следовательно, график функции $y = \operatorname{ctg} x$ и ее свойства можно получить из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ и свойств этой функции.

График функции $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ получается из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ сдвигом вдоль оси абсцисс влево на $\frac{\pi}{2}$ и затем симметрией относительно оси абсцисс. График функции $y = \operatorname{ctg} x$ изображен на рисунке 93.

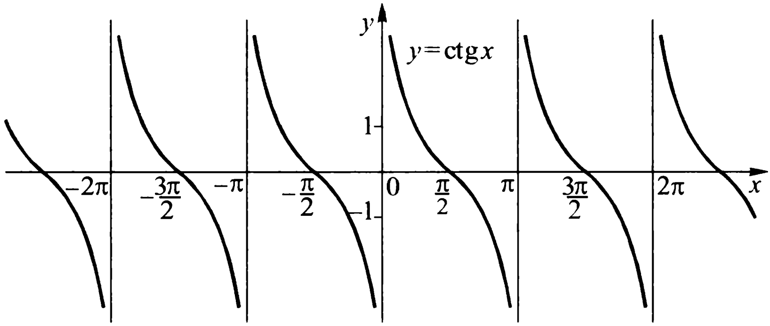


Рис. 93

Задача 1. Найти все решения неравенства $\operatorname{tg} x \leqslant 2$, принадлежащие отрезку $-\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

Δ Из рисунка 94, *а* видно, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ лежит не выше прямой $y = 2$ на промежутках $[-\pi;\ x_3]$, $\left(-\frac{\pi}{2}; x_1\right]$ и $\left(\frac{\pi}{2}; x_2\right]$, где $x_1 = \operatorname{arctg} 2$, $x_2 = \pi + \operatorname{arctg} 2$, $x_3 = -\pi + \operatorname{arctg} 2$.

Ответ. $-\pi \leqslant x \leqslant -\pi + \operatorname{arctg} 2$, $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant \operatorname{arctg} 2$, $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi + \operatorname{arctg} 2$. ▲

Задача 2. Решить неравенство $\operatorname{tg} x > 1$.

Δ Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 1$ (рис. 94, *б*). Рисунок показывает, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ лежит выше прямой $y = 1$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, а также на промежутках, полученных сдвигом его на π, 2π, 3π, $-\pi$, -2π и т. д.

Ответ. $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ▲

Задача 3*. Построить график функции $y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Δ График функции $y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg} 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, которая является периодической с периодом $\frac{\pi}{2}$, можно получить из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ следующими преобразованиями:

1) сдвигом вдоль оси абсцисс влево на $\frac{\pi}{4}$ ед.;

2) сжатием графика функции $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ вдоль оси абсцисс к оси ординат в 2 раза (рис. 94, *в*). ▲

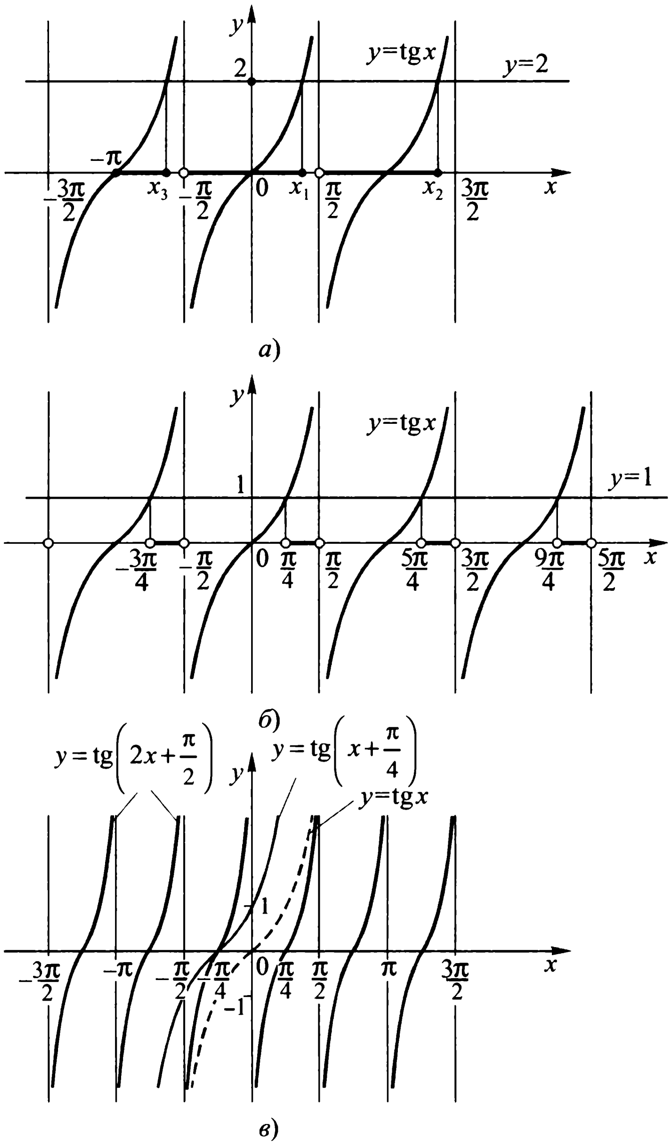


Рис. 94

Отметим, что построение графика функции $y = \mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ можно иначе осуществить, записав данную функцию так: $y = -\mathrm{ctg}\,2x$. В этом случае можно сначала выполнить сжатие графика функции

$y = \mathrm{ctg}\, x$ (рис. 93) вдоль оси абсцисс к оси ординат в 2 раза, а затем график функции $y = -\mathrm{ctg}\, 2x$ получить из графика функции $y = \mathrm{ctg}\, 2x$ с помощью симметрии относительно оси Ox.

Тригонометрические функции широко применяются в математике, физике и технике. Например, многие процессы, такие, как колебание струны, колебание маятника, напряжение в цепи переменного тока и т. д., описываются функцией, которая задается формулой $y = A \sin(\omega x + \varphi)$. Такие процессы называют *гармоническими колебаниями*, а описывающие их функции — *гармониками* (от греч. harmonikos — соразмерный). График функции $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ получается из синусоиды $y = \sin x$ сжатием или растяжением ее вдоль координатных осей и сдвигом вдоль оси Ox. Обычно гармоническое колебание является функцией времени: $y = A \sin(\omega t + \varphi)$, где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза, $\frac{2\pi}{\omega}$ — период колебания.

Упражнения

Пользуясь графиками функций $y = \mathrm{tg}\, x$ и $y = \mathrm{ctg}\, x$, выполнить упражнения (**973–976**).

973. (*Устно.*) Выяснить, при каких значениях x из промежутка $-\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ функция $y = \mathrm{tg}\, x$ принимает:

1) значение, равное 0; 2) положительные, 3) отрицательные значения.

974. (*Устно.*) Выяснить, является ли функция $y = \mathrm{tg}\, x$ возрастающей на промежутке:

1) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; 3) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$; 4) $[2; 3]$.

975. (*Устно.*) Выяснить, при каких значениях x из промежутка $-2\pi < x < \pi$ функция $y = \mathrm{ctg}\, x$ принимает:

1) значение, равное 0; 2) положительные, 3) отрицательные значения.

976. (*Устно.*) Выяснить, является ли функция $y = \mathrm{ctg}\, x$ убывающей на промежутке:

1) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi\right]$; 2) $\left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$; 4) $[1; 2]$.

977. Сравнить числа:

1) $\mathrm{tg}\, 15°$ и $\mathrm{tg}\, 25°$; 3) $\mathrm{tg}\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ и $\mathrm{tg}\, \frac{5\pi}{6}$;

2) $\mathrm{tg}\,(-80°)$ и $\mathrm{tg}\,(-50°)$; 4) $\mathrm{tg}\, \frac{\pi}{5}$ и $\mathrm{tg}\, \frac{4\pi}{5}$;

5) $\operatorname{tg} 2$ и $\operatorname{tg} 3$;
6) $\operatorname{tg} 1$ и $\operatorname{tg} 1{,}5$;
7) $\operatorname{tg}(-1)$ и $\operatorname{tg}(-1{,}5)$;
8) $\operatorname{tg}(-2)$ и $\operatorname{tg}(-3)$.

978. Сравнить числа:

1) $\operatorname{ctg} 35°$ и $\operatorname{ctg} 67°$;
2) $\operatorname{ctg} 95°$ и $\operatorname{ctg} 117°$;
3) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$ и $\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{7}$;
4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ и $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{9}$;
5) $\operatorname{ctg} 1{,}2$ и $\operatorname{ctg} 1{,}5$;
6) $\operatorname{ctg} 2$ и $\operatorname{ctg} 3$.

979. Выяснить, выполняется ли неравенство $\operatorname{tg} x > 0$ во всех точках промежутка:

1) $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;
2) $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$;
3) $\left[-\frac{7\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}\right]$;
4) $\left[-\frac{\pi}{7}; \frac{\pi}{5}\right]$;
5) $[-1; 1]$;
6) $[2; 4]$;
7) $(-3; -2)$;
8) $(0{,}5; 1)$.

980. Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $(-\pi; 2\pi)$:

1) $\operatorname{tg} x \geqslant 1$;
2) $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$;
3) $\operatorname{tg} x < -1$;
4) $\operatorname{tg} x \geqslant -\sqrt{3}$.

981. Найти все числа x интервала $(0; \pi)$, для которых выполняется неравенство:

1) $\operatorname{ctg} x > -\sqrt{3}$;
2) $\operatorname{ctg} x \geqslant -1$;
3) $\operatorname{ctg} x \leqslant 1$;
4) $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$;
5) $-1 < \operatorname{ctg} x \leqslant 0$;
6) $0 \leqslant \operatorname{ctg} x \leqslant 1$.

---

982. Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $[0; 3\pi]$:

1) $\operatorname{tg} x \geqslant 3$;
2) $\operatorname{tg} x < 4$;
3) $\operatorname{tg} x \leqslant -4$;
4) $\operatorname{tg} x > -3$;
5) $\operatorname{ctg} x > 2$;
6) $\operatorname{ctg} x \leqslant -3$.

983. Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$:

1) $\operatorname{tg} 2x \leqslant 1$;
2) $\operatorname{tg} 3x < -\sqrt{3}$;
3) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} > \frac{1}{\sqrt{3}}$;
4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{3} \leqslant 1$.

984*. Построить график функции и выяснить ее свойства:

1) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$;

2) $y = \operatorname{tg} x - 2$; 5) $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

3) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$; 6) $y = \operatorname{ctg} x + 1$.

985*. Найти множество значений функции $y = \operatorname{tg} x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$; 2) $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; 4) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Построить график функции (**986–988**).

986*. 1) $y = \operatorname{tg}|x|$; 2) $y = |\operatorname{tg} x|$; 3) $y = \operatorname{ctg} x$;

4) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$; 5) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$; 6) $y = \sin x \operatorname{ctg} x$.

987*. 1) $y = \begin{cases} \sin x & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x & \text{при } \frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} \cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{ctg} x & \text{при } \frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi. \end{cases}$

988*. 1) $y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{ctg}\left[3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]$.

§ 54. Тригонометрические неравенства

Рассмотрим примеры тригонометрических неравенств. При их решении используются свойства тригонометрических функций и их графики.

З а д а ч а 1. Решить неравенство $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Δ Так как косинус — периодическая функция с периодом 2π, то достаточно найти решения неравенства на отрезке длиной 2π. В качестве такого отрезка возьмем отрезок $[0; 2\pi]$. Рассмотрим на отрезке $[0; 2\pi]$ график функции $y = \cos x$ и проведем прямую $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 95).

Надо найти все те значения x из отрезка $[0;\ 2\pi]$, для которых соответствующие точки графика функции $y = \cos x$ лежат ниже прямой $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и на этой прямой. Прямая $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ пересекает при $x \in [0;\ 2\pi]$ график функции $y = \cos x$ в точках A и B, абсциссы которых есть корни уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$. Одно из решений этого уравнения: $x_1 = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, другое: $x_2 = 2\pi - x_1 = \frac{11\pi}{6}$. Если $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$, то $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

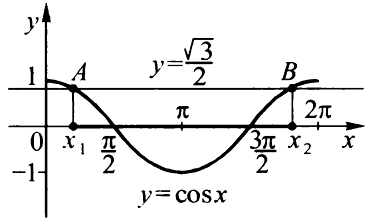


Рис. 95

Следовательно, на отрезке $[0;\ 2\pi]$ все решения неравенства $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ определяются условием $\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6}$.

О т в е т. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. ▲

З а д а ч а 2. Решить неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$.

Δ Рассмотрим график функции $y = \cos x$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ и проведем прямую $y = \frac{1}{2}$ (рис. 96).

Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает на этом отрезке график функции $y = \cos x$ в точках A и B, абсциссы которых $x_1 = -\frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$.

Из рисунка 96 видно, что все решения неравенства образуют интервал $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$, т.е. на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ все решения данного неравенства определяются условием $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$.

О т в е т. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. ▲

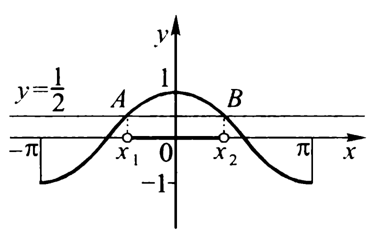


Рис. 96

Неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$ можно также решить с помощью единичной окружности.

Δ На единичной окружности строим угол, косинус которого равен $\frac{1}{2}$. Для этого на оси Ox отметим точку с абсциссой, равной $\frac{1}{2}$, и через эту точку проведем прямую, параллельную оси Oy (рис. 97).

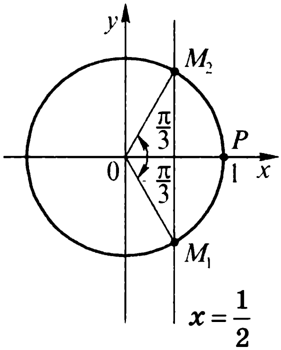


Рис. 97

Эта прямая пересекает единичную окружность в двух точках M_1 и M_2. Точке M_1 соответствует угол в $-\frac{\pi}{3}$ рад. (или в $\frac{5\pi}{3}$ рад.), точке M_2 соответствует угол в $\frac{\pi}{3}$ рад. Из рисунка видно, что все точки дуги M_1PM_2 единичной окружности, кроме ее концов, имеют абсциссу, большую $\frac{1}{2}$. Поэтому на отрезке $[-\pi; \pi]$ все решения данного неравенства заключены в промежутке $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$. На множестве действительных чисел все решения неравенства можно записать так: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 3. Используя единичную окружность, решить неравенство $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$.

Δ Из рисунка 98 видно, что все точки дуги M_2NM_1 единичной окружности имеют абсциссу, меньшую или равную $\frac{1}{2}$. Поэтому на отрезке $[0; 2\pi]$ все решения данного неравенства образуют отрезок $\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}$.

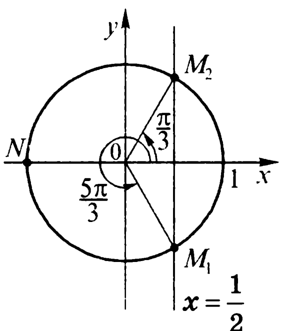


Рис. 98

На множестве действительных чисел все решения неравенства можно представить так: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 4. Решить неравенство $\sin x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Δ Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (рис. 99). Сначала найдем все решения неравенства $\sin x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ длиной 2π. На этом отрезке уравнение $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ имеет два корня: $x = \frac{3\pi}{4}$ и $x = \frac{9\pi}{4}$. На рисунке 99 видно, что решениями неравенства $\sin x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ являются все числа интервала $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right)$.

Так как функция $\sin x$ периодическая с периодом 2π, все решения неравенства $\sin x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ — это числа x из интервалов $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{9\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (см. рис. 99).

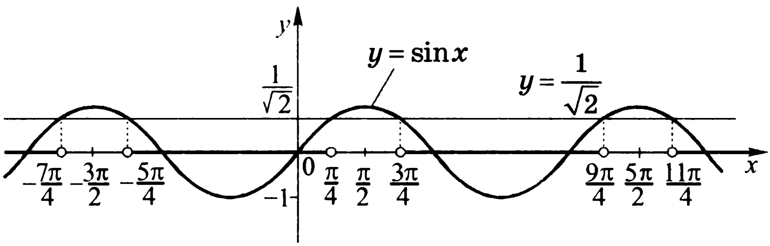


Рис. 99

О т в е т. $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{9\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Заметим, что решение задачи 4 можно начать с рассмотрения другого отрезка длиной 2π, например отрезка $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Из рисунка 99 видно, что на этом отрезке решениями неравенства $\sin x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ являются числа интервала $\left(-\frac{5\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$. Следовательно, ответ можно записать в виде $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

З а д а ч а 5. Решить неравенство $\cos x \geqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Δ Построим графики функций $y = \cos x$ и $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (рис. 100). На отрезке $[-\pi; \pi]$ уравнение $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ имеет два корня: $x = -\frac{3\pi}{4}$ и $x = \frac{3\pi}{4}$. Из рисунка 100 видно, что решениями неравенства $\cos x \geqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ являются все числа x отрезка $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

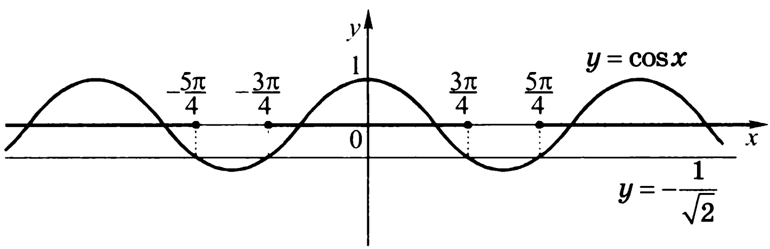


Рис. 100

Так как функция $\cos x$ периодическая с периодом 2π, то все решения неравенства $\cos x \geqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}$ — это числа x из отрезков $\left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (см. рис. 100).

О т в е т. $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

З а д а ч а 6. Решить неравенство $\operatorname{tg} x > 1$.

Δ Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 1$ (рис. 101). На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ длиной π уравнение $\operatorname{tg} x = 1$ имеет один корень $x = \frac{\pi}{4}$. Из рисунка 101 видно, что решениями неравенства $\operatorname{tg} x > 1$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ являются все числа x интервала $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

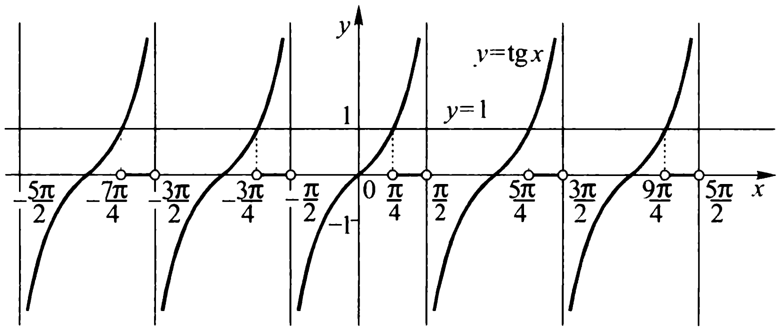


Рис. 101

Так как функция $\operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π, то все решения неравенства $\operatorname{tg} x > 1$ — это число x из интервалов $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (см. рис. 101).

Ответ. $\frac{\pi}{4}+\pi n < x < \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 7*. Решить неравенство $\sin^2 x < \frac{1}{2}$.

Δ Это неравенство можно представить в виде $|\sin x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Построим график функции $y = |\sin x|$. Для этого сначала построим график функции $y = \sin x$ и затем часть графика, лежащую ниже оси Ox, отразим симметрично относительно этой оси (рис. 102). На этом же рисунке построим прямую $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

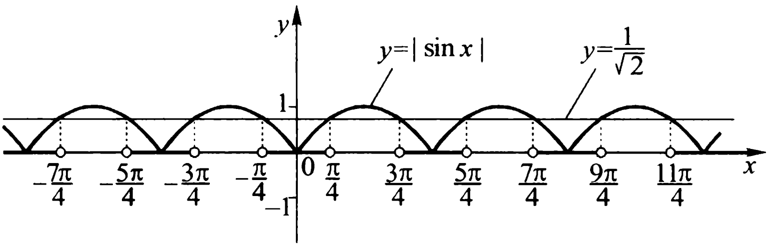


Рис. 102

Функция $y = |\sin x|$ периодическая с периодом π. На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ длиной π уравнение $|\sin x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ имеет два корня: $x = -\frac{\pi}{4}$ и

$x=\frac{\pi}{4}$. Из рисунка 102 видно, что решениями неравенства $|\sin x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ являются все числа интервала $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$. Следовательно, все решения неравенства $|\sin x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ — это числа x из интервалов $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$ (см. рис. 102).

Ответ. $-\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 8*. Решить неравенство $4\sin^2 x-8\sin x+3\leqslant 0$.

∆ Обозначая $\sin x=t$, имеем квадратное неравенство $4t^2-8t+3\leqslant 0$. Разложив квадратный трехчлен $4t^2-8t+3$ на множители, запишем неравенство в виде $4\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{3}{2}\right)\leqslant 0$. Заменяя t на $\sin x$, получаем неравенство $\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\left(\sin x-\frac{3}{2}\right)\leqslant 0$. Так как $\sin x-\frac{3}{2}<0$ при всех x, то исходное неравенство равносильно неравенству $\sin x-\frac{1}{2}\geqslant 0$ или $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$.

Решениями последнего неравенства являются числа x из отрезков $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\frac{\pi}{6}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. ▲

Упражнения

Решить неравенство (989–998).

989. 1) $\sin x<0$; 2) $\sin x\geqslant 0$; 3) $\sin x>-\frac{3}{2}$; 4) $\sin x<2$; 5) $\sin x>1$; 6) $\sin x<-2$; 7) $\sin x\leqslant -1$; 8) $\sin x\geqslant 1$.

990. 1) $\sin x\leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\sin x>-\frac{1}{2}$; 4) $\sin x<\frac{1}{2}$.

991. 1) $\cos x < 0$; 5) $\cos x < -2$;

2) $\cos x \geqslant 0$; 6) $\cos x > 1$;

3) $\cos x \leqslant \sqrt{3}$; 7) $\cos x \geqslant 1$;

4) $\cos x \geqslant -2$; 8) $\cos x \leqslant -1$.

992. 1) $\cos x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\cos x \geqslant -\frac{1}{2}$;

2) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\cos x > -\frac{1}{3}$;

3) $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$; 6) $\cos x \geqslant \frac{1}{3}$.

993. 1) $\operatorname{tg} x < 0$; 5) $\operatorname{tg} x < -1$;

2) $\operatorname{tg} x \geqslant 0$; 6) $\operatorname{tg} x > -1$;

3) $\operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}$; 7) $\operatorname{tg} x \leqslant 3$;

4) $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$; 8) $\operatorname{tg} x > -2$.

994. 1) $1 - 2\sin 2x > 0$; 3) $3\operatorname{tg}\frac{x}{2} \leqslant \sqrt{3}$;

2) $2\cos 2x + 1 < 0$; 4) $\operatorname{ctg} 3x \geqslant \sqrt{3}$.

995. 1) $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 1$; 3) $4\cos^2 x \leqslant 3$;

2) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $4\sin^2 x \geqslant 1$.

996. 1) $\operatorname{tg}^2 x \leqslant 1$; 2) $\operatorname{ctg}^2 x > 1$.

997*. 1) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geqslant 0$; 3) $\sin x - \cos x \geqslant 0$;

2) $\cos 2x + \cos x \leqslant 0$; 4) $\sin 2x + \sin x < 0$.

998*. 1) $2\cos^2 x - \sin x > 2$; 2) $\cos 2x - 5\sin x \leqslant 3$.

999*. Найти область определения функции:

1) $y = \sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 1}$; 2) $y = \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x - 3}$.

1000. Решить неравенство:

1) $\sqrt{5 - 2\sin x} \geqslant 6\sin x - 1$; 2) $1 + 6\cos x \leqslant 2\sqrt{2 + 4\cos x}$.

§ 55. Обратные тригонометрические функции

1. Функция $y = \arcsin x$

По определению арксинуса числа для каждого $x \in [-1; 1]$ определено одно число $y = \arcsin x$. Тем самым на отрезке $[-1; 1]$ задана функция $y = \arcsin x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Покажем, что *функция* $y = \arcsin x$ *является обратной к функции* $y = \sin x$, *рассматриваемой на отрезке* $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

○ Рассмотрим уравнение $y = \sin x$, где y — заданное число из отрезка $-1 \leqslant y \leqslant 1$, а x — неизвестное. На отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ это уравнение по определению арксинуса числа имеет единственный корень:

$$x = \arcsin y.$$

В полученной формуле меняем местами x и y:

$$y = \arcsin x. \ ●$$

Таким образом, свойства функции $y = \arcsin x$ можно получить из свойств функции $y = \sin x$. График функции $y = \arcsin x$ симметричен графику функции $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ относительно прямой $y = x$ (рис. 103, 104).

Перечислим *основные свойства функции* $y = \arcsin x$:

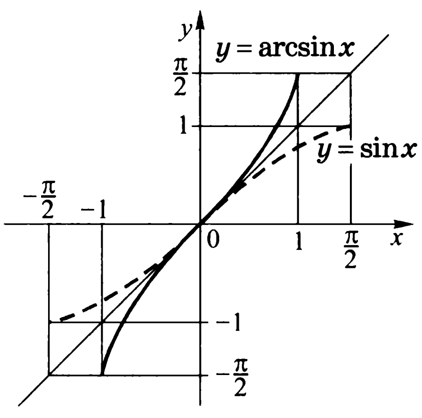


Рис. 103

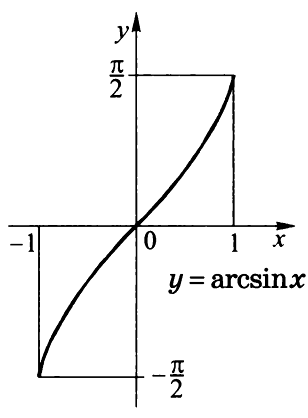


Рис. 104

1. *Область определения* — отрезок $[-1; 1]$.

2. *Множество значений* — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Функция $y = \arcsin x$ *возрастает*.

4. Функция $y = \arcsin x$ является *нечетной*:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

2. Функция $y = \arccos x$

По определению арккосинуса числа для каждого $x \in [-1; 1]$ определено одно число $y = \arccos x$. Тем самым на отрезке $[-1; 1]$ определена функция $y = \arccos x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Эта функция является обратной к функции $y = \cos x$, рассматриваемой на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$. График функции $y = \arccos x$ симметричен графику функции $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ относительно прямой $y = x$ (рис. 105, 106).

Перечислим *основные свойства функции* $y = \arccos x$:

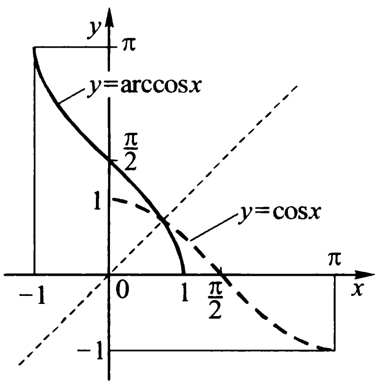


Рис. 105

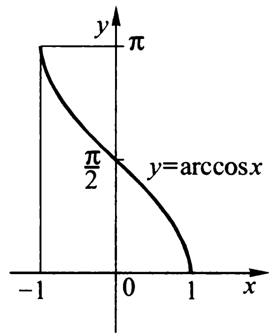


Рис. 106

1. *Область определения* — отрезок $[-1; 1]$.
2. *Множество значений* — отрезок $[0; \pi]$.
3. Функция $y = \arccos x$ *убывает*.

3. Функция $y = \operatorname{arctg} x$

По определению арктангенса числа для каждого действительного x определено одно число $y = \operatorname{arctg} x$. Тем самым на всей числовой прямой задана функция $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \boldsymbol{R}$. Эта функция является обратной к функции $y = \operatorname{tg} x$, рассматриваемой на интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ получается из графика функции

$y = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 92) симметрией относительно прямой $y = x$ (рис. 107).

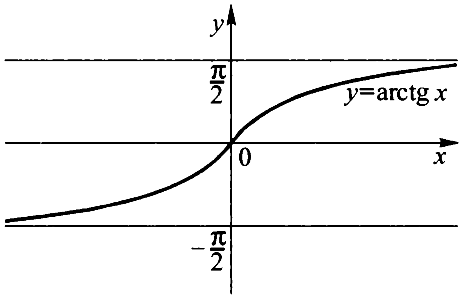


Рис. 107

Перечислим *основные свойства функции* $y = \operatorname{arctg} x$:

1. *Область определения* — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.
2. *Множество значений* — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
3. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ *возрастает*.
4. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является *нечетной*: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

Функции $y = \arcsin x$, $\arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ называются *обратными тригонометрическими функциями*.

Задача 1. Сравнить числа:

1) $\arcsin \frac{1}{3}$ и $\arcsin \frac{1}{4}$;

2) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$ и $\arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$;

3) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)$ и $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Δ 1) Так как $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ и функция $y = \arcsin x$ возрастает, то $\arcsin \frac{1}{3} > \arcsin \frac{1}{4}$.

2) Так как $\frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{\sqrt{2}}{3}$ и функция $y = \arccos x$ убывает, то $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4} > \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$.

3) Так как $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{2}$ и функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает, то $\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right) < \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$. ▲

Задача 2. Решить уравнение $\arccos(2x+1)=\frac{3\pi}{4}$.

Δ Так как $\frac{3\pi}{4}\in[0;\pi]$, то по определению арккосинуса числа данное уравнение равносильно уравнению $2x+1=\cos\frac{3\pi}{4}$, откуда $2x+1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$. ▲

Задача 3. Найти область определения функции $y=\arcsin\frac{x-1}{3}$.

Δ Так как функция $y=\arcsin x$ определена при $-1\leqslant x\leqslant 1$, то функция $y=\arcsin\frac{x-1}{3}$ определена для тех значений x, для которых выполняются неравенства $-1\leqslant\frac{x-1}{3}\leqslant 1$. Отсюда $-3\leqslant x-1\leqslant 3$, $-2\leqslant x\leqslant 4$. ▲

Упражнения

Сравнить числа (**1001–1003**).

1001. 1) $\arcsin\frac{2}{3}$ и $\arcsin\frac{3}{4}$; 3) $\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\arcsin\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$;

2) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\arcsin\frac{2}{\sqrt{10}}$; 4) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$ и $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$.

1002. 1) $\arccos\frac{1}{3}$ и $\arccos\frac{2}{7}$; 3) $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$ и $\arccos\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$;

2) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; 4) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ и $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

1003. 1) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ и $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$; 3) $\operatorname{arctg}\left(-3\sqrt{4}\right)$ и $\operatorname{arctg}\left(-4\sqrt{3}\right)$;

2) $\operatorname{arctg}2\sqrt{3}$ и $\operatorname{arctg}3\sqrt{2}$; 4) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Решить уравнение (**1004–1006**).

1004. 1) $\arcsin(2-3x)=\frac{\pi}{6}$; 3) $\arcsin\frac{x-2}{4}=-\frac{\pi}{4}$;

2) $\arcsin(3-2x)=\frac{\pi}{4}$; 4) $\arcsin\frac{x+3}{2}=-\frac{\pi}{3}$.

1005. 1) $\arccos(2x+3)=\frac{\pi}{3}$; 3) $\arccos\frac{x+1}{3}=\frac{2\pi}{3}$;

2) $\arccos(3x+1)=\frac{\pi}{2}$; 4) $\arccos\frac{2x-1}{3}=\pi$.

1006. 1) $\operatorname{arctg}\frac{1-x}{4}=\frac{\pi}{3}$; 3) $\operatorname{arctg}(2x+1)=-\frac{\pi}{3}$;

2) $\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{3}=\frac{\pi}{4}$; 4) $\operatorname{arctg}(2-3x)=-\frac{\pi}{4}$.

1007. Найти область определения функции:

1) $y=\arcsin\frac{1-3x}{2}$; 5) $y=\arcsin\frac{1-\sqrt{x}}{2}$;

2) $y=\arcsin\frac{x-3}{2}$; 6) $y=\arccos\left(2\sqrt{x}-3\right)$;

3) $y=\arccos(2x-3)$; 7) $y=\arccos(x^2-x+1)$;

4) $y=\arccos(2-3x)$; 8) $y=\arcsin\frac{2x^2-5}{3}$.

1008. Доказать, что график функции $y=\arccos x$ симметричен относительно точки $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Упражнения к главе VIII

1009. Найти область определения функции:

1) $y=\sin x+\cos x$; 4) $y=\sqrt{\cos x}$;

2) $y=\sin x+\operatorname{tg} x$; 5) $y=\frac{2x}{2\sin x-1}$;

3) $y=\sqrt{\sin x}$; 6) $y=\frac{\cos x}{2\sin^2 x-\sin x}$.

1010. Найти множество значений функции:

1) $y=1-2\sin^2 x$; 4) $y=2\cos^2 x+5$;

2) $y=2\cos^2 x-1$; 5) $y=\cos 3x\sin x-\sin 3x\cos x+4$;

3) $y=3-2\sin^2 x$; 6) $y=\cos 2x\cos x+\sin 2x\sin x-3$.

1011. Выяснить, является ли данная функция четной или нечетной:

1) $y=x^2+\cos x$; 3) $y=(1-x^2)\cos x$;

2) $y=x^3-\sin x$; 4) $y=(1+\sin x)\sin x$.

1012. Найти наименьший положительный период функции:

1) $y=\cos 7x$; 2) $y=\sin\frac{x}{7}$.

1013. Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $[0;\ 3\pi]$:

1) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$;
3) $3\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;
2) $\sqrt{3} - \sin x = \sin x$;
4) $\cos x + 1 = 0$.

1014. Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $[-2\pi;\ -\pi]$:

1) $1 + 2\cos x \geqslant 0$;
3) $2 + \operatorname{tg} x > 0$;
2) $1 - 2\sin x < 0$;
4) $1 - 2\operatorname{tg} x \leqslant 0$.

1015. Выяснить графически, сколько корней имеет уравнение:

1) $\cos x = x^2$;
2) $\sin x = 1 - x$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найти область определения функции $y = \operatorname{tg} 4x$. Является ли эта функция четной?

2. Построить график функции $y = \sin x$ (или $y = \cos x$) на отрезке $[-\pi;\ 2\pi]$. При каких значениях x из этого отрезка $y(x) = 1$, $y(x) = -1$, $y(x) = 0$, $y(x) > 0$, $y(x) < 0$? Разбить данный отрезок на отрезки возрастания и убывания функции.

3. Построить график функции $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. При каких значениях x из этого отрезка $\operatorname{tg} x = 0$, $\operatorname{tg} x < 0$, $\operatorname{tg} x > 0$?

4. Решить неравенство $\operatorname{tg} x \geqslant -1$.

1016. Найти область определения функции:

1) $y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$;
3) $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$;
2) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$;
4) $y = \sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 3}$.

1017. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = \cos^4 x - \sin^4 x$;
3) $y = 1 - 2\,|\sin 3x|$;
2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
4) $y = \sin^2 x - 2\cos^2 x$.

1018. Выяснить, является ли данная функция четной или нечетной:

1) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$;
3) $y = \cos x + |\sin x|$;
2) $y = \sin x \operatorname{tg} x$;
4) $y = \sin x\,|\cos x|$.

1019. Найти наименьший положительный период функции:

1) $y = 2\sin(2x + 1)$;
2) $y = 3\operatorname{tg}\frac{1}{4}(x + 1)$.

1020. Выяснить графически, сколько корней имеет уравнение:

1) $\cos x = |x|$;
2) $\sin x = |x + 1|$.

1021. Найти нули функции:

1) $y = \sin^2 x + \sin x$;
2) $y = \cos^2 x - \cos x$;
3) $y = \cos 4x - \cos 2x + \sin x$;
4) $y = \cos x - \cos 2x - \sin 3x$.

1022. Решить неравенство:

1) $\operatorname{ctg} x \cos x \geqslant 0$;
2) $\operatorname{tg} x \sin x < 0$.

1023*. Найти все значения x, при которых функция $y = 1{,}5 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$ принимает положительные значения.

1024*. Найти все значения x, при которых функция $y = \operatorname{tg} 2x - 1$ принимает отрицательные значения.

1025*. Построить график функции:

1) $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - 2$;
2) $y = \frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$;
3) $y = \sin x + |\sin x|$;
4) $y = \cos x - \sqrt{\cos^2 x}$;
5) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - 1$;
6) $y = 2\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$;
7*) $y = 2\arcsin(x + 1)$;
8*) $y = 3\arccos(x - 2)$.

1026*. Найти множество значений функции:

1) $y = 12\sin x - 5\cos x$;
2) $y = \cos^2 x - \sin x$;
3) $y = \arcsin(x^2 - 2)$;
4) $y = 2\arccos(x^2 - 1)$.

1027*. Решить неравенство:

1) $\sin x \geqslant \cos x$;
2) $\operatorname{tg} x > \sin x$;
3) $\cos x - \sqrt{3}\sin x < \sqrt{2}$;
4) $\sqrt{3}\sin x + \cos x < 1$.

1028*. Найти область определения функции:

1) $y = \sqrt{3\sin^2 x - \cos^2 x}$;
2) $y = \sqrt{\sin^2 x - 3\cos^2 x}$;
3) $y = \arcsin(x^2 - 1)$;
4) $y = \arccos(x^2 - 4)$.

Историческая справка

Тригонометрические функции (получившие название от греч. *trigonon* — треугольник и *meteo* — измеряю) играют огромную роль в математике и ее приложениях.

Исследованием тригонометрических функций практически занимались еще древнегреческие математики, изучая взаимное изменение величин в геометрии и астрономии. Соотношения между сторонами в прямоугольных треугольниках, которые по сути своей являются тригонометрическими функциями, рассматривались уже в III в. до н. э. в работах *Евклида*, *Архимеда*, *Аполлония* и других ученых.

Учение о тригонометрических величинах получило развитие в VIII — XV вв. в странах Среднего и Ближнего Востока. Так, в IX в. в Багдаде *ал-Хорезми* составил первые таблицы синусов. *Ал-Бузджани* в X в. сформулировал теорему синусов и с ее помощью построил таблицу синусов с интервалом 15′, в которой значения синусов приведены с точностью до 8-го десятичного знака. *Ахмад-ал-Беруни* в XI в. вместо деления радиуса на части при определении значений синуса и косинуса, сделанного до него *Птоломеем*, начал использовать окружность единичного радиуса. В первой половине XV в. *ал-Каши* создал тригонометрические таблицы с шагом 1′, которые были непревзойденными по точности последующие 250 лет. Самым крупным европейским представителем той эпохи, внесшим вклад в развитие исследования тригонометрических функций, считается *Региомонтан*.

В начале XVII в. в развитии тригонометрии наметилось новое направление — аналитическое. Если до этого учения о тригонометрических функциях строились на геометрической основе, то в XVII—XIX вв. тригонометрия постепенно вошла в состав математического анализа и стала широко использоваться в механике и технике, особенно при рассмотрении колебательных процессов и иных периодических явлений.

О свойствах периодичности тригонометрических функций знал еще *Ф. Виет*. Швейцарский математик *И. Бернулли* (1642—1727) в своих работах начал применять символы тригонометрических функций. Однако близкую к принятой теперь символику ввел *Л. Эйлер* в 1748 г. в своей работе «Введение в анализ бесконечных». Он в этой работе рассмотрел вопрос о знаках всех тригонометрических функций любого аргумента.

Тригонометрические функции Эйлер рассматривал как особые числа, называя их общим термином *«трансцендентные количества»*, получающиеся из круга. Для вычисления приближенных значений $\sin x$ и $\cos x$ он получил их разложения в ряды:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ \dots\ , \qquad (1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ \dots\ . \qquad (2)$$

На рисунке 108 показано, что графики функций, образованных различным числом членов ряда (1), постепенно приближаются к графику функции $y = \cos x$.

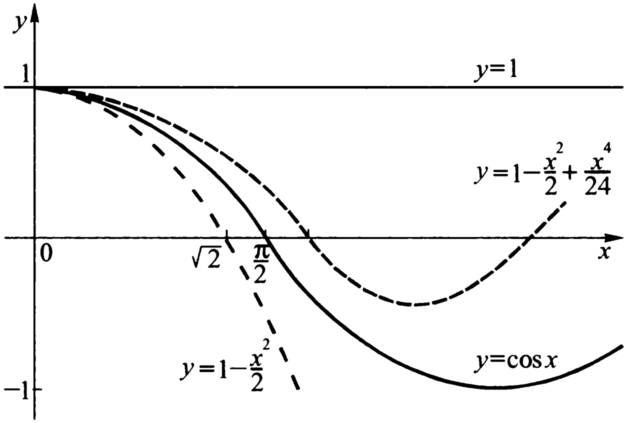


Рис. 108

Дальнейшее, после Эйлера, развитие теории тригонометрических функций было продолжено в XIX в. в работах русского математика *Н.И. Лобачевского* (1792—1856), а также в трудах других ученых, например в работах профессоров МГУ *Д.Е. Меньшова* и *Н.К. Бари*.

ОТВЕТЫ

Глава I

1. 2) 0,(27); 4) −0,25; 6) 0,(0990). **2.** 1) 0,(29); 2) 0,(855); 4) 0,44(1); 6) 2,8(7). **3.** 2) $\frac{16}{11}$; 4) $-\frac{7}{9}$; 6) $-2\frac{329}{990}$. **4.** 2) 4; 4) 0. **5.** 2) $10\frac{2}{7}$; 4) 5,8. **6.** 2) Является. **7.** 2) 341. **8.** 2) $q = \frac{1}{3}$, $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$; 4) $q = \frac{1}{2}$, $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$. **9.** 2) Является; 4) является. **10.** 2) 0; 4) −2. **11.** 2) $\frac{27}{4}$; 4) $\frac{2}{3}$. **12.** 2) $7\frac{1}{5}$; 4) $-8\frac{1}{6}$. **13.** 2) 1; 4) $\frac{7}{30}$. **14.** 2) Не является; 4) является. **15.** 2) 90,(90). **16.** 2) $4\sqrt{3} + 8$. **17.** 2) $\frac{1}{2}$. **18.** 2) 9; 4) $\frac{1}{3}$. **19.** $2a$. **22.** 4,5 и 4,6. **23.** 2) $|x| = -x$; 4) $|x| = -x$. **24.** 2) Рациональное число; 4) рациональное число; 6) иррациональное число. **25.** 2) 10; 4) 9; 6) $\frac{2}{3}$; 8) $\frac{5}{3}$. **26.** 2) $\sqrt{11} - \sqrt{2{,}1} > \sqrt{10} - \sqrt{3{,}1}$. **27.** 2) 3; 4) $2 + \sqrt{3}$; 6) 1. **29.** 2) 2; 4) 15. **30.** 2) 81; 4) $\frac{1}{81}$. **31.** 2) −1; 4) −4; 6) −8. **32.** 2) $x = -\frac{1}{2}$; 4) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. **33.** 2) 5; 4) −11; 6) $\frac{1}{30}$. **34.** 2) 48; 4) 20. **35.** 2) 33; 4) 7. **36.** 2) 0,2; 4) 2. **37.** 2) 50; 4) 16. **38.** 2) a^2b^3; 4) a^2b^3. **39.** 2) $3ab$; 4) $\frac{2}{b}$. **40.** 2) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{3}{2}$. **41.** 2) 0,4; 4) 2; 6) 4. **42.** 2) $3x$; 4) $\frac{2b}{a}$. **43.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{4}$. **44.** 2) 2; 4) 5. **45.** 2) y^2; 4) a^8b^9; 6) $3a$. **46.** 2) При $x \geqslant -3$; 4) при $\frac{2}{3} \leqslant x < 2$. **47.** 2) 2; 4) $4\sqrt{6}$. **48.** 2) 6; 4) $\frac{1}{2}$; 6) 4. **49.** 2) ab^2c; 4) $2xy$. **50.** 2) $3x$; 4) 0; 6) $a - 1$. **51.** 2) 7; 4) 1. **52.** 2) а) $(3 - x)^3$; б) $(x - 3)^3$; 4) $-3x - 5$. **53.** 2) $\sqrt[3]{7}+\sqrt{15}<\sqrt{8}+\sqrt[3]{28}$. **55.** 2) $2\sqrt[4]{b}$; 4) 1. **58.** 2) 3; 4) 27; 6) $\frac{1}{27}$. **59.** 2) 5; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$. **60.** 2) 49; 4) 125. **61.** 2) 121; 4) 150. **62.** 2) $5\frac{15}{16}$; 4) $10\frac{19}{27}$. **63.** 2) 3; 4) 2,7. **64.** 2) b; 4) a; 6) 1. **65.** 2) $a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})$; 4) $3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(4x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})$. **66.** 2) $(y^{\frac{1}{3}}-1)(y^{\frac{1}{3}}+1)$; 4) $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$; 6) $(0{,}1m^{\frac{1}{12}}-n^{\frac{1}{12}})(0{,}1m^{\frac{1}{12}}+n^{\frac{1}{12}})$. **67.** 2) $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})(x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y)$; 4) $(3a^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{6}})(9a^{\frac{2}{3}}-3a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{6}}+c^{\frac{1}{3}})$. **68.** 2) a^2b. **69.** 2) 1; 4) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$. **70.** 2) 3. **71.** 2) $b^{\frac{1}{2}}$; 4) $a + b$. **72.** 2) $a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}$; 4) $\sqrt{c} - 1$.

73. 2) $3c$. **74.** 2) $\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; 4) $2\sqrt{b}$. **75.** 2) $2y$; 4) $2\sqrt[3]{b}$. **76.** 2) $2\sqrt[3]{b}$; 4) $\frac{2\sqrt[3]{a}}{a+b}$.

77. 2) $2(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})$; 4) $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x+1}$. **78.** 5306 р. 4 к. **79.** 2158 р. 70 к. **80.** 2) 1; 4) $\frac{1}{16}$.

81. 2) 3; 4) $\frac{1}{5}$; 6) $-\frac{624}{625}$. **82.** 2) 9; 4) 8. **83.** 2) 18; 4) 0,75.

84. 2) $5^{-\frac{2}{3}}>5^{-\frac{3}{4}}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$; 6) $2^{\sqrt{3}}>2^{1,7}$; 8) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}<\left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$.

85. 2) $(0{,}013)^{-1}>1$; 4) $27^{1,5}>1$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}<1$; 8) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}>1$. **86.** 2) $a^{2\sqrt{3}}$; 4) b.

87. 2) $\sqrt[4]{5}<\sqrt[4]{7}$. **88.** 2) y; 4) $4a^{-1}-\frac{1}{9}b^{-2\sqrt{3}}$. **89.** 2) $m^{\frac{8\sqrt{5}-15}{2}}$; 4) a^{-2}. **90.** 2) $x=-\frac{1}{2}$;

4) $x=2\pi$. **91.** 2) $x=\frac{3\sqrt{2}}{8}$; 4) $x=1$. **92.** 2) $\sqrt[4]{5}<\sqrt[3]{7}$; 4) $\sqrt[4]{13}>\sqrt[5]{23}$. **93.** 2) $x=-\frac{1}{3}$;

4) $x=1$. **94.** 2) 4; 4) 2. **95.** 2) $2\frac{29}{90}$; 4) $\frac{34}{99}$. **96.** 2) 1; 0,01; $\frac{3}{2}$; $37\frac{1}{27}$; $\frac{25}{36}$; $\frac{16}{81}$;

4) 2; 9; 10; 4; $\frac{1}{8}$; $\frac{9}{16}$. **97.** 2) 64; 10; 5; 2; 1; 2; 4) $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{7}$; $11\frac{1}{9}$. **98.** 2) 15;

4) 10^5; 6) $\frac{81}{256}$. **99.** 2) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$; 6) 4. **100.** 2) 98°; $32^{\frac{1}{5}}$; $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$. **101.** 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}<$

$<(0{,}41)^{-\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}}>\left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$. **102.** 2) a^{-1}; 4) $a^{\frac{5}{7}}$; 6) $a^{\frac{1}{2}}$. **103.** 2) a^2.

104. 2) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^3}>\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^3}$. **105.** 2) $x=3$; 4) $x=2$; 6) $x=\frac{1}{2}$.

106. 2) $a^{\frac{2}{5}}+b^{\frac{2}{5}}$. **107.** 2) $\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$.

Проверь себя!

1. 1) 135; 2) $\frac{251}{48}$; 3) 4,5. **2.** 1) $\frac{a^2b}{c}$; 2) a^{-1}. **3.** $\frac{a^{\frac{3}{4}}-3a^{\frac{1}{2}}}{7}$. **4.** $\sqrt[5]{\left(\frac{2}{9}\right)^3}<\sqrt[5]{\left(\frac{1}{4}\right)^3}$.
5. $4\sqrt[3]{ab}$.

---

109. 2) $\frac{2681}{24750}$. **111.** 2) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$; 4) $\frac{2\sqrt[4]{3}}{3}$; 6) $\frac{11(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{5}$; 8) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$.

112. 2) 7. **113.** 2) $2\sqrt[3]{xy}$; 4) $\frac{x+y}{\sqrt{xy}}$. **114.** 2) $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2$; 4) a^2+b^2. **115.** 2) 1.

116. 2) a^{-1}; 4) 1.

Глава II

120. 2) $x \in R$; 4) $x \geqslant 6$; 6) $x \leqslant -3$, $x \geqslant \frac{1}{2}$; 8) $0 \leqslant x \leqslant 2$; 10) $x < 0$, $0 < x < \frac{1}{2}$; 12) $x \geqslant 0$; 14) $x \neq 0$. **123.** 2) Убывающая; 4) убывающая. **125.** 2) $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}} > 1$; 4) $\pi^{\frac{2}{5}} > 1$; 6) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} < 1$. **127.** 2) $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$; 4) $(-2; 9)$. **132.** 2) Возрастающая; 4) убывающая. **133.** 2) $y > 0$; 4) $y < 2$; 6) $y \geqslant 1$. **137.** 88,39 г; 22,1 г. **138.** 486 661,161 м^3. **139.** 2) $x = \frac{2}{3}$; 4) $x = -\frac{2}{3}$. **140.** 2) $x = -0{,}5$; 4) $x = 4$. **141.** 2) $x = 2{,}5$; 4) $x = 9$; 6) $x = 0{,}4$. **142.** 2) $x = 1$; 4) $x = 1\frac{2}{3}$. **143.** 2) $x = 1$; 4) $x = 3$; 6) $x = 2$. **144.** 2) $x = 0$; 4) $x = 0$. **145.** 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; 4) $x = 1$. **146.** 2) $x < 2$; 4) $x < -0{,}5$; 6) $x \geqslant 3$. **147.** 2) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$; 4) $x = -\frac{1}{3}$. **148.** 2) $x_1 = 1$, $x_2 = -3$; 4) $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 3$. **149.** 2) $x = 0{,}8$; 4) $x = -1$; 6) $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = -3$. **150.** 2) $x_1 = 0{,}3$, $x_2 = -0{,}2$; 4) $x = 4$. **151.** 2) $x = -1$; 4) $x = 1$. **152.** 2) $y = 3$; 4) $x = 2$. **153.** 2) $x = 3$; 4) $x = 3$. **154.** 2) $x = -3$; 4) $x = 4$. **155.** 2) $x = -1$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; 6) $x = -1$. **156.** 2) $x > 4$; 4) $x < 1$, $x > 2$; 6) $1 < x < 2$. **157.** 2) $x > 1$; 4) $x \leqslant 1$. **158.** 2) $x < 2$; 4) $x < -1$. **162.** $x = 4$. **163.** 2) $x = 2$; 4) $x = 3{,}25$. **164.** 2) $x = 0$. **165.** 2) $x = \frac{14}{5}$. **166.** 2) $-2 < x < 1$; 4) $-\frac{4}{3} < x < 2$. **167.** $-\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{6}$. **168.** $-1, -2, -3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \ldots$ (т. е. для $a < 0$ и $a > 3$, где $a \in Z$). **169.** 1) $-2 < a < 2$; 2) $-2 < a < 2$. **170.** 2) $2^{\sqrt{3}} > 2^{1{,}7}$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi} < \left(\frac{1}{9}\right)^{3{,}14}$. **171.** 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} < 1$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3} > 1$. **173.** 2) $0{,}04 \leqslant y \leqslant 5$. **174.** 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; 4) $x = -2$; 6) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. **175.** 2) $x_1 = -5$, $x_2 = 1$; 4) $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{3}{2}$. **176.** 2) $x = 0$; 4) $x = 2$; 6) $x = 2$; 8) $x = 1$. **177.** 2) $x = 1$; 4) $x = 3$. **178.** 2) $x = 0$; 4) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. **179.** 2) $x < -1$; 4) $-2 < x < 2$.

Проверь себя!

2. $\left(\frac{1}{5}\right)^{0{,}2} > \left(\frac{1}{5}\right)^{1{,}2}$, $5^{-0{,}2} > 5^{-1{,}2}$. **3.** $x = 2$; $x_1 = -5$, $x_2 = 1$; $x = 1$; $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. **4.** $x > 4$; $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

---

182. $a(1 + 0{,}01p)^{n-1}$. **183.** 2) $x \neq -2$; 4) $x < 1$. **184.** 2) $y < 1$; 4) $y > 2$. **186.** 2) $x = 24$. **187.** 2) $x = 9$; 4) $x = 1$. **188.** 2) $x = 0$; 4) $x = -0{,}5$. **189.** 2) $-3 < x < 1$; 4) $-1 < x \leqslant 1$. **191.** 2) $x = 4$; 4) $x = 1$. **192.** 2) $x = 3$. **193.** 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 5$; 4) $x = -\frac{1}{2}$. **194.** $x = -2$, $x \geqslant 0$. **195.** 2) $x < -3$, $x > 1$; 4) $x < -\frac{4}{3}$, $x > 4$. **196.** 2) $x \leqslant 0$, $x > \frac{1}{2}$.

200. 2) $0{,}2^{0,3} < 1$; 4) $\left(\sqrt{3}\right)^{0,2} > 1$. **201.** 2) Выше — при $x > 1$, ниже — при $0 < x < 1$. **202.** 2) Выше — при $0 < x < 1$, ниже — при $x > 1$. **203.** 2) $\left(\frac{10}{11}\right)^{2,3} < \left(\frac{12}{11}\right)^{2,3}$; 4) $2{,}5^{-3,1} > 2{,}6^{-3,1}$; 6) $\left(\frac{14}{15}\right)^{\frac{3}{4}} < \left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$; 8) $\left(2\sqrt[3]{6}\right)^{-0,2} > \left(6\sqrt[3]{2}\right)^{-0,2}$. **205.** 2) Выше — при $0 < x < 1$, ниже — при $x > 1$. **208.** 1) Два; 2) один. **210.** 2) $y = \frac{4-x}{5}$; 4) $y = \frac{2x+1}{3}$; 6) $y = \sqrt[3]{x+3}$. **211.** 2) Все действительные числа; 4) все действительные числа; 6) множество значений: все действительные числа, кроме $y = 4$; область определения — все действительные числа, кроме $x = 0$. **213.** 2) Нет; 4) нет. **214.** 2) $y = -\sqrt[3]{x^5}$; 4) $y = -x^3$. **216.** 2) Нет корней; 4) нет корней. **217.** 2) Равносильны; 4) не равносильны; 6) равносильны. **218.** 2) Равносильны; 4) не равносильны. **219.** 2) Второе. **220.** 2) Нет корней; 4) $x = 4$. **221.** 2) $3{,}5 < x < 5$. **222.** 2) Равносильны. **223.** 2) Равносильны; 4) равносильны. **224.** 2) Равносильны; 4) равносильны. **225.** 2) Второе; 4) оба. **226.** $x = 3$. **227.** 2) $x = 6$. **228.** 2) $-2 < x < 1$, $x > 2$. **229.** 1) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$; 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$; 3) $x_1 = -4$, $x_2 = -3$, $x_3 = -2$, $x_4 = 1$; 4) $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$. **231.** 2) $x = 27$; 4) $x = 5$. **232.** 2) $x = -7$; 4) $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. **233.** 2) $x = 5$; 4) $x = 5$; 6) $x_1 = -3$, $x_2 = 4$. **234.** 2) $x = 4$; 4) $x = 5$; 6) $x = -1$. **235.** 2) $x = 7$; 4) $x = 5$; 6) $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. **236.** 2) Нет решений; 4) нет решений. **237.** 2) $x = -3$; 4) $x = 18$; 6) $x = 20$. **238.** 2) $x = -4$; 4) $x = 5$. **239.** 2) $x = 10$; 4) $x_{1,2} = \pm\sqrt{17}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$. **240.** 2) $x_1 = -1$, $x_2 = -3$. **241.** 2) Два; 4) один, $x = 1$. **242.** 1) $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 2$; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; 3) $x_1 = -4$, $x_2 = 1$; 4) $x_1 = -6$, $x_2 = 1$. **243.** 1) $x = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{4a^2+9}\right)$ при $a \geqslant 0$, нет корней при $a < 0$; 2) $x = -1+\sqrt{a^2-2a+2}$ при $a \geqslant 1$, нет корней при $a < 1$. **244.** 2) $1 \leqslant x \leqslant 1{,}5$; 4) $x < -5$. **245.** 2) $0 \leqslant x < 9$; 4) $x < 13{,}5$; 6) $0 \leqslant x \leqslant 2$. **246.** 2) $2 \leqslant x < 3$; 4) $x < -5$; 6) $x \geqslant -\frac{5}{9}$; 8) $-\frac{5}{4} \leqslant x \leqslant -\frac{19}{16}$. **247.** 2) $-1 \leqslant x < 0$, $0 < x \leqslant 1$; 4) $-5 \leqslant x < -3$, $3 < x \leqslant 5$; 6) $x < -\frac{1}{3}$, $x > 9$; 8) нет решений. **248.** 2) $-1 \leqslant x \leqslant 2$; 4) $x < -1$, $x > 2$; 6) $0 \leqslant x \leqslant 4$; 8) $x \leqslant -1$, $x \geqslant 2$. **249.** 2) $x \geqslant -1$; 4) $\frac{2}{3} \leqslant x < 6$; 6) $-3 \leqslant x < 1$; 8) $2 < x \leqslant 3$. **250.** 1) $x > \frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $-2{,}8 \leqslant x < 6$. **253.** 1) $1 \leqslant x \leqslant a^2 + 1$ при $a \geqslant 0$, нет решений при $a < 0$; 2) $\frac{a}{2}\left(2+\sqrt{2}\right) \leqslant x \leqslant 0$. **256.** 2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\pi}$, $\left(\sqrt{2}\right)^{\pi}$, $(1{,}9)^{\pi}$, π^{π}; 4) $\pi^{-\frac{2}{3}}$,

$\left(\sqrt{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$, $(1{,}3)^{-\frac{2}{3}}$, $(0{,}5)^{-\frac{2}{3}}$. **257.** 1) $x = 1$; 2) $x = -1$. **258.** 2) $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$; 4) $x \leqslant 1$, $x \geqslant 2$. **259.** 2) $y = \frac{2}{x} + 3$ — обратная функция; область определения: все действительные числа, кроме $x = 0$; множество значений: все действительные числа, кроме $y = 3$; 4) $y = \sqrt[3]{x+1}$ — обратная функция; область определения и множество значений — все действительные числа. **261.** 2) Да; 4) да. **262.** 2) $x = 21$; 4) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$; 6) $x = -1$; 8) $x_{1,2} = \pm 8$. **263.** 2) $-8 < x \leqslant 1$; 4) $-3 \leqslant x \leqslant 1$. **265.** 2) Да; 4) нет. **266.** 2) $y = x^2 - 4x$, область определения — $x \leqslant 2$, множество значений — $y \leqslant -4$; 4) $y = 6x - x^2 - 8$, область определения — $x \geqslant 3$, множество значений — $y \leqslant 1$. **267.** 2) $x = 1$; 4) $x = 0$. **268.** 2) $x = 259$; 4) $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$. **269.** 2) $x < 0$; 4) $x \geqslant -\frac{1}{2}$. **270.** 1) $6 < x \leqslant 8$; 2) $x < -4$, $\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{8}{7}$. **271.** 1) Если $a \leqslant 2$, то решений нет; если $a > 2$, то $6 \leqslant x < \frac{a^4 + 16a^2 + 16}{4a^2}$; 2) $-\frac{|a|}{\sqrt{5}} < x \leqslant |a|$ при $a \neq 0$, нет корней при $a = 0$.

Глава IV

272. 2) 4; 4) $-\frac{1}{3}$. **273.** 2) $\frac{2}{3}$; 4) 0. **274.** 2) Верно; 4) верно. **275.** 2) Верно; 4) верно. **276.** 2) Верно; 4) верно. **278.** 2) 6; 4) 0; 6) -3. **279.** 2) 4; 4) 0; 6) -1. **280.** 2) -2; 4) 1; 6) $-\frac{1}{3}$. **281.** 2) 3; 4) -3. **282.** 2) -3; 4) -2. **283.** 2) 16; 4) 6. **284.** 2) 64; 4) 3. **285.** 2) 144; 4) 1. **286.** 2) $x = 625$; 4) $x = 25$; 6) $x = 5{,}5$. **287.** 2) $x < 7$; 4) $x > \frac{1}{2}$; 6) $x < 0$. **288.** 2) $-1{,}5$; 4) $-1\frac{2}{3}$. **289.** 2) $\frac{5}{3}$; 4) $\frac{3}{7}$. **290.** 2) $-4{,}5$; 4) $-2{,}8$. **291.** 2) -3; 4) $2{,}2$. **292.** 2) $\frac{1}{4}$; 4) 4. **293.** 2) $\frac{1}{4}$; 4) 5^{12}; 6) $1\frac{2}{7}$. **294.** 2) 1; 4) $\frac{1}{6}$; 6) 2. **295.** 2) $x = 7$; 4) $x = \frac{1}{\sqrt[8]{5}}$; 6) $x = \frac{1}{32}$. **296.** 2) $x < -3$, $x > 2$; 4) $x < 1$, $x > 2$. **297.** 2) $x \in \boldsymbol{R}$, $x \neq -2$; 4) не существует ни при каких x; 6) $x \in \boldsymbol{R}$. **298.** 2) $0 < x < 2$; 4) $-\frac{5}{3} < x < 4$. **299.** 2) $x = 4$. **300.** 2) $x = \log_{1,2} 4$; 4) $x = \frac{1}{3} \log_2 3$. **301.** 2) $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_7 2$; 4) $x = -\frac{5}{4} + \frac{1}{4} \log_{\frac{1}{3}} 1{,}5$. **302.** 2) $x = \log_3 4$; 4) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \log_8 60$; 6) $x_1 = -1$, $x_2 = \log_{\frac{1}{3}} 2$; 8) $x_1 = \log_8 3$, $x_2 = \log_8 5$.

303. 1) $x_1 = 0$, $x_2 = \log_{1,5} 3$; 2) $x = \log_{0,6} 2$. 304. 1) $\frac{1}{2} < x < 1$, $x > 1$; 2) $1 < x < 2$, $x > 2$; 3) $-1 < x < 0$, $0 < x < 2$, $x > 2$; 4) $x < -3$, $-3 < x < -2$, $-2 < x < -1$, $-1 < x < 1$. 305. Если $a = -1$, то $x = 0$; если $a > 0$, то $x = \log_3 a^2$; если $a < 0$, $a \neq -1$, то $x_1 = \log_3 a^2$, $x_2 = \log_3 (-a)$. 306. 2) 3; 4) 2. 307. 2) 2; 4) −3. 308. 2) $\frac{2}{3}$; 4) $-\frac{7}{6}$. 309. 2) $\frac{3}{2}$; 4) −4; 6) $-2\frac{1}{5}$. 310. 2) $\frac{3}{2}$; 4) −3. 311. 2) $x = \frac{a^2}{b^3}$; 4) $x = \sqrt[4]{a}\,\sqrt[7]{b^4}$.
312. 2) $4 \log_2 a + \frac{1}{3} \log_2 b - 3 \log_2 c$; 4) $\frac{5}{4} \log_2 c - \frac{2}{5} \log_2 a - \frac{3}{5} \log_2 b$.
313. 2) $1\frac{1}{3}$; 4) 0. 314. 1) 3; 2) 19; 3) 475; 4) 22,5. 315. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) −1; 4) 1.
316. 2) $-\log_2 5$; 4) $\frac{1}{3} \log_2 0{,}1$. 318. 2) $-\frac{1}{3}$; 4) $-\frac{3}{2}$. 319. 1) $2(a + b - 1)$; 2) $2a + \frac{1}{2}$.
321. 1) $x = 4\sqrt{3}$; 2) $x = \frac{2}{7}$; 3) $x = 10$; 4) $x = 14$; 5) $x = 0{,}1$; 6) $x = 4{,}5$.
322. 2) 0,845; 4) −0,176. 323. 2) 0,693; 4) −0,154. 324. 2) 1,29; 4) −0,42.
325. 2) 1,3; 4) −15,42. 327. 2) 1,58; 4) −0,861; 6) 4,25. 328. 1) 25; 2) $-\frac{1}{2}$.
329. 2) $x = 8$; 4) $x = 3$; 6) $x = 2$. 330. 2) $x = 27$; 4) $x_1 = 27$, $x_2 = \frac{1}{27}$. 331. $1 + m$, $\frac{1}{3}m$, $\frac{m+1}{3}$, $m + 2$. 332. $\frac{1}{2} + m$. 333. $\frac{1+m}{n+m}$. 334. $\frac{2+m}{1+2m}$. 335. $1 - \frac{2}{3}m$. 336. $\frac{18}{2m+3}$. 337. 1) −2; 2) −3. 338. 1) $\frac{ab+3b+2}{2b+2ab+2}$; 2) $\frac{2ab+b+1}{ab+2b+1}$. 339. 2) $x_1 = 9$, $x_2 = 27$; 4) $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \sqrt{2}$. 340. 1) $x_1 = 4$, $x_2 = 8$; 2) $x_1 = 5$, $x_2 = 125$; 3) $x_1 = 819$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $x_1 = \frac{1}{9}$, $x_2 = \sqrt[3]{3}$. 341. 2) 1; 4) 0,5. 342. 1) 2; 2) $\frac{4}{3}$. 343. 9 лет.
344. 3052 качания. 345. 2) 2,7182788; 4) 2,7182819. 346. 1) 2,7182682; 2) 2,7182805. 350. 2) $\log_{\frac{1}{3}} 9 > \log_{\frac{1}{3}} 17$; 4) $\log_2 \frac{\sqrt{5}}{2} > \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$. 351. 2) $\log_3 0{,}45 < 0$; 4) $\log_{0,5} 9{,}6 < 0$. 352. 2) $x < 1$; 4) $x > 1$. 353. 2) Убывающая; 4) возрастающая.
354. 2) $0 < x < 2$; 4) $0 < x < \frac{1}{2}$; 6) $x \geqslant 4$. 355. 2) $x > -2$; 4) $-3 < x < 3$. 357. 2) $a > b$; 4) $a < b$. 358. 1) $\frac{1}{2} + \lg 3 < \lg 19 - \lg 2$; 2) $\frac{\lg 5 + \lg\sqrt{7}}{2} < \lg \frac{5+\sqrt{7}}{2}$; 3) $3 (\lg 7 - \lg 5) > 2\left(\frac{1}{2}\lg 9 - \frac{1}{3}\lg 8\right)$; 4) $\lg (\lg 4) > \lg \frac{1}{3}$. 359. 1) $a < b$; 2) $a < b$. 361. 1) $x < -1$, $x > 4$; 2) $-1 < x < 6$; 3) $-3 < x < -2$, $x > 2$; 4) $x > 4$; 5) $x \neq 0$, $x \neq 4$; 6) $x < -3$,

$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, $x > 3$; 7) $x > 1$; 8) $x > 3$. **365.** 1) $x \neq 2$, $x \neq 3$; 2) $-1 < x < \frac{1}{2}$. **366.** 2) $x = 8$; 4) $x = 46$; 6) $x = -1{,}6$. **367.** 2) Корней нет. **368.** 2) $x_1 = 5$, $x_2 = 2$; 4) корней нет. **369.** 2) $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{205}}{2}$; 4) $x_1 = 2$, $x_2 = -4$; 6) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. **370.** 2) $x = 3$; 4) $x = \sqrt{2}$. **371.** 2) Корней нет; 4) $x = 2$. **372.** 2) $x = 5$. **373.** 2) $x_{1,2} = \pm 8$; 4) $x = 16$. **374.** 2) $x = 1$; 4) $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. **375.** 2) $x = 3$. **376.** 2) $x = 3$; 4) $x_1 = 4$, $x_2 = -8$. **377.** 2) $x = 9$; 4) $x_1 = 100$, $x_2 = 1000$. **378.** 2) $x_1 = 1\frac{63}{64}$, $x_2 = 0$. **379.** 2) $x = 9$; 4) корней нет. **380.** 2) $x_1 = \frac{1}{9}$, $x_2 = 3$; 4) $x_1 = 3$, $x_2 = 9$; 6) $x_1 = 4$, $x_2 = 64$. **381.** 2) $x_1 = 4$, $x_2 = \sqrt{2}$; 3) $x_1 = 3$, $x_2 = 9$; 4) $x_1 = 27$, $x_2 = \frac{1}{9}$. **382.** 2) $x = \frac{2}{7}$. **383.** 2) $x = -4$. **384.** 1) $x_1 = -11$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5$; 2) $x = -5$. **385.** 1) $x = 5{,}5$; 2) $x = \frac{3}{7}$; 3) $x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $x = 1$. **386.** 1) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = 3$; 2) $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 2$. **387.** 1) $x = 512$; 2) $x_1 = 3\frac{1}{125}$, $x_2 = 128$. **388.** 1) $x = 5^{\frac{1}{3}}$; 2) $x = 4$. **389.** Если $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 0$, $a \neq 5^{-\frac{1}{3}}$, то $x = 5^{\frac{a}{3+\log_a 5}}$. **390.** 2) $x \geqslant \frac{1}{8}$; 4) $x > 0{,}5$. **391.** 2) $0 < x < 0{,}16$; 4) $x \geqslant 0{,}16$. **392.** 2) $x < \frac{7}{5}$; 4) $-2 < x < 2$. **393.** 2) $x \leqslant -30$; 4) $1 < x \leqslant 10$; 6) $x < -0{,}05$. **394.** 2) $x > 25$; 4) $\frac{5}{3} < x < 3$. **395.** 2) $2 < x \leqslant 3$, $11 \leqslant x < 12$; 4) решений нет. **396.** 2) $-\frac{2}{3} < x < 1$; 4) $x \leqslant -\frac{2}{3}$, $x \geqslant \frac{1}{2}$; 6) $x \geqslant \sqrt{2}$. **397.** 2) $x > 7$. **398.** 2) $x \leqslant -1$, $x \geqslant 4$; 4) $x < -0{,}5$, $x > 3$. **399.** 2) $x < 2$, $x > 3$; 4) $-2 \leqslant x < -1$, $6 < x \leqslant 7$. **400.** 2) $x > 2$. **401.** 2) $-\sqrt{2} < x < -\frac{3}{2\sqrt{2}}$, $\frac{3}{2\sqrt{2}} < x < \sqrt{2}$. **402.** 2) $0 < x < 0{,}1$; $x > 10\,000$. **403.** 2) $0 < x < 1$, $x > 10$. **404.** 2) $x > 1$. **405.** 2) $x < -1$, $\log_4 \frac{14}{4} < x < \log_4 3$. **406.** 2) $x < \frac{\sqrt{6}-1}{2}$, $\frac{6}{5} < x < \frac{\sqrt{6}}{2}$; 4) $\frac{1}{2} < x < 1$, $x > 3$. **407.** $x < \log_2(\sqrt{2}-1)$, $x \geqslant \frac{1}{2}$. **408.** $2 - \log_4 5 < x \leqslant 1$. **409.** $-\log_3 2 \leqslant x < 0$, $\frac{1}{2}\log_3 2 < x \leqslant 1$. **410.** 1) $-\frac{1}{2} \leqslant x < -\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{3} \leqslant x < 0$. **411.** 1) $x \geqslant 7$; 2) $1 < x \leqslant \sqrt[3]{2}$, $x \geqslant 8$. **412.** 1) $1 < x < \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$ при $0 < a < 1$, $x > \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$ при $a > 1$; 2) $|x| > \sqrt{a}$, $0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{a}}$, если $a > 1$; $0 < |x| < \sqrt{a}$, $|x| > \frac{1}{\sqrt{a}}$, если $0 < a < 1$. **413.** 2) 4; 4) -3. **414.** 2) -4; 4) 6. **415.** 2) 1; 4) $\frac{2}{3}$. **416.** 2) $\frac{1}{4}$; 4) 4. **417.** 2) $-2{,}2$. **418.** $a < b$.

419. 2) 2,39; 4) −3,65. **421.** 2) Возрастающая; 4) убывающая. **423.** 2) $x < 0$, $x > 2$. **424.** 2) $x = \frac{3}{8}$; 4) $x = 2$. **425.** 2) $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{3}{2}$; 4) $x_1 = 4$, $x_2 = 8$. **426.** 2) $x = -4$; 4) $x = 2$. **427.** 2) $x < 4$; 4) $x < -1$. **428.** 2) Решений нет. **429.** 2) $x < -8$, $x > 1$. **430.** 2) −4,5; 4) 36; 6) 2. **431.** 1) 1; 2) 2. **432.** 1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; 2) $2^{2\log_2 5 + \log_{\frac{1}{9}} 9} > \sqrt{8}$. **433.** $\log_a b$. **434.** $\frac{6(1-b)}{a+1}$. **435.** $\frac{3(1-a)}{1+b}$. **436.** $\frac{3-2a}{a+2b}$. **437.** 2) $0 < x < 1$. **439.** 2) $x = \frac{1}{3}\log_2 3$; 4) $x = \frac{1}{4}\left(\log_{\frac{1}{3}} 1{,}5 - 5\right)$; 6) $x = \log_5 3$. **440.** 2) $x = 27$; 4) $x_1 = 27$, $x_2 = \frac{1}{27}$. **441.** 2) $x_{1,2} = \pm 8$. **442.** 2) $x = -4$; 4) $x_1 = 14$, $x_2 = 6$. **443.** 2) Корней нет. **444.** 2) $x = 4{,}5$; 4) $x_1 = \frac{1}{25}$, $x_2 = 5$. **445.** 2) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$; 4) корней нет. **446.** 2) $5 < x \leqslant 6$; 4) $x > 4$; 6) $-4 < x < -3$. **447.** 1) $0 < x \leqslant 4^{-\frac{11}{4}}$, $1 < x \leqslant 64$; 2) $0 < x < 1$, $x = \sqrt{3}$. **448.** 1) $-\frac{1}{2} < x < 0$; 2) $\sqrt{6} < x < 3$, $-3 < x < -\sqrt{6}$. **450.** 2, 10, 50 или 50, 10, 2. **452.** 2) $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}1$. **453.** 2) $x_1 = 23$, $x_2 = -1{,}8$. **454.** 2) $x = 0$; 4) $x = 2$. **455.** 2) $x \leqslant 0$, $\log_6 5 \leqslant x < 1$. **456.** $x < \log_{13}\frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $x > 1$. **457.** 1) $x = \frac{7}{2}$; 2) $x = 5$. **458.** $a < 0$, $a = 4$. **459.** $0 < x < \frac{1}{\sqrt{a}}$, $a^{1-\frac{\sqrt{6}}{2}} < x < a$, $x > a^{1+\frac{\sqrt{6}}{2}}$, если $a > 1$; $0 < x < a^{1+\frac{\sqrt{6}}{2}}$, $a < x < a^{1-\frac{\sqrt{6}}{2}}$, $x > \frac{1}{\sqrt{a}}$, если $0 < a < 1$.

Глава V

460. 1) (4; 2); 2) (1; 2). **461.** 1) (1; 7), (7; 1); 2) (3; −2), (−2; 3); 3) (1; 3), $\left(9; \frac{1}{3}\right)$; 4) (−3; 2), $\left(-4; \frac{3}{2}\right)$; 5) (15; 5); 6) (5; 4); 7) (1; −3), (−1; 3), (3; −1), (−3; 1); 8) (2; 3), (3; 2), (−2; −3), (−3; −2). **462.** 1) (4; 5), (−5; −4); 2) (5; 2), (−5; −2); 3) (3; 4), (4; 3); 4) (1; −2), (2; −1); 5) (2; 4), (4; 2); 6) (2; 3), (−2; 3), $(\sqrt{3}; 4)$, $(-\sqrt{3}; 4)$. **463.** 1) (2; 3), (3; 2); 2) (3; 2), (−2; −3). **464.** 1) $(10^6; 0{,}1)$; 2) $\left(8; \frac{1}{4}\right)$; 3) (1000; 10); 4) (1; 9). **465.** 1) (25; 9); 2) (9; 4). **466.** 1) (3; 5), (5; 3); 2) (3; 1), $\left(-\frac{1}{2}; -6\right)$; 3) (3; −1), $\left(-2; \frac{3}{2}\right)$; 4) (1; 2), (2; 1). **467.** 1) (2; 2), (−2; −2), (1; −3), (−1; 3); 2) (1; 3), (−1; −3), $\left(\frac{5}{\sqrt{41}}; -\frac{25}{\sqrt{41}}\right)$, $\left(-\frac{5}{\sqrt{41}}; \frac{25}{\sqrt{41}}\right)$. **468.** 1) (4; 1);

2) (2; 8), (8; 2). **469.** 1) (100; 10), (0,1; 0,01); 2) (2; 1). **470.** 1) (1; 3); 2) (1; 1). **471.** 1) $\left(\frac{140}{31}; -\frac{22}{31}\right)$; 2) $\left(\frac{69}{25}; \frac{21}{25}\right)$. **472.** 1) (3; −1), (−1; 3), (1; −3), (−3; 1); 2) (3; 2), (2; 3), (−3; −2), (−2; −3). **473.** 1) (2; −1), (−1; 2); 2) (1; 4), (−4; −1); 3) (0; 2); 4) (5; 1), (1; 5), (−5; −1), (−1; −5). **474.** 1) (3; 5), (−3; −5), $\left(36; -\frac{23}{2}\right)$, $\left(-36; \frac{23}{2}\right)$; 2) (5; 8), (−5; −8), (2; −1), (−2; 1); 3) (2; −1), (−2; 1), $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$; 4) (2; 1), (−2; −1), $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **475.** 1) (3; 1), (−3; −1), $\left(\frac{2}{\sqrt{21}}; -\frac{1}{\sqrt{21}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{21}}; \frac{1}{\sqrt{21}}\right)$; 2) (1; −1), (−1; 1), (1; 2), (2; 1). **476.** 1), 2) Нет решений. **477.** 1) (0; −2); 2) (4; 1). **478.** 1) (0; 1,75); 2) (1; 0,75). **479.** 1) (2; 3); 2) (3; 2); 3) (9; 1); 4) $(125\sqrt{5}; \sqrt{5})$. **480.** 1) (1; 3), (3; 1); 2) (2; 3), (3; 2); 3) (3; 0,5), (0,5; 3); 4) $\left(1; -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$. **481.** 1) $\left(\frac{3}{7}; \frac{3}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$, $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{5}{13}\right)$. **482.** 1) $(-1+\sqrt{5}; 1+\sqrt{5})$, $(-1-\sqrt{5}; 1-\sqrt{5})$, $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)$; 2) (1; 2), (2; 1). **483.** 1) (1; 1); 2) (0; −2), (−1; −3); 3) (−1; −1); 4) (2; −1). **484.** 1) (1; 1), $(\log_5 2; \log_2 5)$; 2) (1; 1), $(\log_3 4; \log_4 3)$. **485.** 1) (8; 8); 2) (7; 9), (9; 7). **486.** 1) (2; 2); 2) $(2\sqrt{6}; \sqrt{6})$, $(-2\sqrt{6}; -\sqrt{6})$; 3) (2; −2), (−2; 2); 4) (1; 4); 5) (−1; 2), $\left(\frac{3}{4}; \frac{67}{16}\right)$; 6) (2; 4), (4;2); 7) (3; 4), (4; 3), $(6+\sqrt{29}; 6-\sqrt{29})$, $(6-\sqrt{29}; 6+\sqrt{29})$; 8) (3; 1), (−1; −3), $\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}; -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}; -\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$. **487.** 1) (0; 0), (1; 1); 2) (0; 0), (1, −2), (−2; 1), (3; 6), (6; 3); 3) (2; 3), (−2; 3); 4) (3; 1), $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$. **488.** 1) (1; 1), $(\log_3 2; 0)$; 2) $(\log_3 4; 1)$. **489.** 1) (3; 2); 2) (3; −2); 3) (2; 7), (3; 8), (1; 6), (−1; 4); 4) (1; 5), (3; 1). **490.** 1) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{6}\right)$, $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right)$; 2) (1; 2); 3) $\left(8; \frac{1}{4}\right)$; 4) (2; 4), $\left(\sqrt[5]{256}; \sqrt[5]{16}\right)$. **491.** 1) (1; −1), (2,5; 2); 2) (0; 1), (2; −1). **492.** 1) (−1; 1); 2) (2; 2). **493.** 1) (2; 32),

(32; 2); 2) (3; 27), (27; 3); 3) $\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 4) (3; $\sqrt{3}$), ($\sqrt{3}$; 3). **494.** $\left(\dfrac{1}{4};2\right)$, (2 + $\sqrt{7}$; 2 + $\sqrt{7}$). **495.** $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$. **496.** $-1 < a < 1$. **497.** $a = -6$. **498.** 64. **499.** 68. **500.** 40 км/ч, 60 км/ч. **501.** 10 ч, 15 ч. **502.** 3 ч, 4 ч. **503.** 96 км. **504.** 20 км/ч, 12 км/ч. **505.** 14 км/ч, 2 км/ч. **506.** 117. **507.** 20 чел., 6 ч в день. **508.** 9 ч, 6 ч. **509.** $p\left(\dfrac{2p}{q}\right)^{\frac{m}{n-m}}$, $100\left[\left(\dfrac{2p}{q}\right)^{\frac{1}{m-n}}-1\right]\%$. **510.** (1; $\sqrt{3}$), (−1; $-\sqrt{3}$). **511.** Каждая из двух. **512.** 1) Да; 2) да. **513.** 1) (0; −2); 2) (5; 1); 3) (2; −1), (−1; 2); 4) (3; 2), (−2; −3); 5) (2; −3); 6) (2; −1). **514.** 1) (3; 1); 2) (1; −1); 3) (2; 2), (−2; −2); 4) (2; 4), (4; 2), (−2; −4), (−4; −2). **515.** 1) (4; 8), (8; 4); 2) (4; 6), (6; 4). **516.** 1) (1; 2); 2) (2; 1); 3) решений нет; 4) (25; 4), (4; 25); 5) (2; 6), (6; 2); 6) (9; 7). **517.** 1) (5; 45); 2) 27. **518.** 1) Два; 2) одно; 3) одно; 4) одно. **519.** 1) (6; −2), (−2; 6); 2) (1; −3), (−3; 1). **520.** 1) (3; 5), (−3; −5), (8; −5), (−8; 5); 2) (2; 3), (3; 2), (−2; −3), (−3; −2); 3) (0; 2), (0; −2), (1; 0); 4) (1; 2), (−1; −2). **521.** 1) (5; −1), (−1; 5); 2) (3; 2), (2; 3), (5; 1), (1; 5); 3) (1; 1), (1; −2), (−2; 1); 4) (4; 2), (−4; −2). **522.** 1) (4; 5), (−4; −5), ($3\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$), ($-3\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$); 2) (3; 5), (−3; −5), $\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{13}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{5}{3};-\dfrac{13}{3}\right)$. **523.** 1) (2; −1), (1; −2); 2) (2; 1), (1; 2), (−2; −1), (−1; −2). **524.** 1) (4; 9), (9; 4); 2) (8; 27), (27; 8). **525.** 1) (3; 1); 2) (2; 2). **526.** 1) (2; 3); 2) (−9; 3). **527.** 1) (7; −2); 2) (1; 1), (9; −3). **528.** 1) (100; 10), (0,1; 0,01); 2) (6; 3), (3; 6). **529.** 1) (6; 2); 2) (3; 2). **530.** 1) (4; 1); 2) (3; 18), (1; −6). **531.** 1) (4,5; 0,5); 2) (3; −3). **532.** 7 км. **533.** 6 с. **534.** 12 ч. **535.** $15(30 - q)$, $10 < q < 19\dfrac{1}{3}$.

Проверь себя!

1. 1) (4; 2); 2) (3; 2), (2; 3); 3) (2; 7), (7; 2). **2.** 12 и 8.

Главы VI — VII

536. 2) $\dfrac{2\pi}{3}$; 4) $\dfrac{5\pi}{6}$; 6) $\dfrac{8\pi}{45}$; 8) $\dfrac{7\pi}{9}$. **537.** 2) 20°; 4) 135°; 6) $\left(\dfrac{540}{\pi}\right)^{\circ}$; 8) $\left(\dfrac{64{,}8}{\pi}\right)^{\circ}$. **539.** 0,4 м. **540.** 2 рад. **541.** $\dfrac{3\pi}{8}$ см^2. **542.** 2 рад. **545.** 2) (0; 1); 4) (0; −1); 6) $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 8) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **549.** 2) (0; 1); 4) (−1; 0); 6) (0; 1). **550.** 2) (0; 1); 4) (0; −1). **551.** 2) $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) (1; 0), (−1; 0). **552.** 2) $2\pi k$, где k — любое целое число; 4) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, где k – любое целое число. **553.** 2) Вторая;

4) четвертая. **554.** 2) $x = 1{,}8\pi$, $k = 4$; 4) $x = \frac{4}{3}\pi$, $k = 3$; 6) $x = \frac{5}{3}\pi$, $k = 2$. **556.** 2) (0; 1); 4) (0; −1). **557.** 2) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. **559.** 2) −1; 4) −1; 6) 1. **560.** 2) $\sin\beta = 0$, $\cos\beta = 1$; 4) $\sin\beta = 1$, $\cos\beta = 0$; 6) $\sin\beta = 0$, $\cos\beta = -1$. **561.** 2) 2; 4) −1. **562.** 2) 0; 4) −1. **563.** 2) −7; 4) $-\frac{1}{4}$. **564.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. **566.** 2) $-\frac{5}{4}$; 4) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. **567.** 2) $\frac{11}{4}$; 4) $\frac{13}{12}$. **569.** 2) $x = \pi + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x = \pi + 4\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 6) $x = \frac{2}{5}\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. **573.** 2) Во второй; 4) в третьей; 6) во второй; 8) в четвертой; 10) в третьей. **574.** 2) В третьей; 4) во второй; 6) во второй. **575.** 2) Плюс; 4) минус; 6) плюс; 8) минус; 10) минус; 12) плюс; 14) плюс; 16) минус. **576.** 2) Минус; 4) плюс; 6) минус; 8) плюс; 10) минус. **577.** 2) Плюс; 4) минус; 6) плюс; 8) минус; 10) минус. **578.** 2) Минус, плюс, минус; 4) плюс, плюс, плюс. **579.** 2) Плюс, минус, минус; 4) минус, плюс, минус. **580.** 2) Минус; 4) минус; 6) плюс. **581.** 2) Плюс, минус, минус, минус. **583.** 2) Минус; 4) плюс. **584.** 2) $\cos 1{,}3 > \cos 2{,}3$. **585.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x = \pi + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. **586.** 2) Во второй. **588.** 2) Да; 4) нет; 6) нет. **589.** 2) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$. **590.** 2) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$; 4) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$; 6) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{12}{5}$; 8) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$, $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$, $\sin\alpha = -\frac{24}{25}$. **591.** 2) $\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$; 4) $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. **592.** 2) Нет. **593.** $\cos\alpha = \frac{9}{11}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{9}$. **594.** $\frac{1}{3}$. **595.** $\pm\frac{3}{4}$. **596.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) 2. **597.** 2) $\frac{11}{16}$. **598.** 2) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. **600.** 2) 0; 4) $1 + \sin\alpha$. **601.** 2) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$, 4; 4) 2. **603.** 2) 0; 4) $\operatorname{tg}^2\alpha$. **605.** $\frac{8}{25}$. **606.** $\frac{37}{125}$. **607.** 7. **608.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. **609.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) −3; 6) 2. **610.** 2) $2\cos\alpha$; 4) 2. **612.** 2) $-\frac{5}{2}$. **613.** 2) $-2\cos\alpha$. **615.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x = \frac{\pi k}{2}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 6) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. **617.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) −1. **618.** 2) $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$. **619.** 2) $\cos 3\beta$; 4) −1.

620. 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 1. 621. 2) $-\frac{2+\sqrt{14}}{6}$. 622. 2) $-\sin\alpha\cos\beta$; 4) $\sin\alpha\cos\beta$. 623. $\frac{84}{85}$, $\frac{36}{85}$. 624. $-\frac{63}{65}$. 625. $\frac{77}{36}$. 626. 2) $\frac{1}{2}\cos^2\alpha$; 4) $\sin\alpha\sin 3\alpha$. 628. 2) 1; 4) $\sqrt{3}$. 629. 2) $\frac{1}{7}$. 630. $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha$. 631. 2) $\sin 2\beta$. 632. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x=4\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. 633. 2) $\cos^2 82^\circ-\sin^2 82^\circ$; 4) $2\sin 22^\circ30'\times\cos 22^\circ30'$; 6) $\cos^2\frac{5\pi}{6}-\sin^2\frac{5\pi}{6}$. 634. 2) $2\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\beta}{2}\right)$; 4) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 6) $\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$. 635. 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$. 636. 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; 4) -1. 637. 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) -2. 638. 2) $\frac{24}{25}$; 4) $\frac{8}{9}$. 639. 2) $\frac{7}{25}$. 640. $\frac{4}{3}$. 641. 2) $\sin 50^\circ$; 4) $\cos^2 2\alpha$. 642. 2) $\mathrm{ctg}^2\,\alpha$. 644. 2) $\frac{8}{9}$. 647. 2) $x=\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 6) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. 648. 2) $\frac{1+\cos\frac{1}{2}}{2}$; 4) $\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}{2}$. 649. 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 1. 650. 2) $\sqrt{0{,}8}$; 4) 0,5. 651. 2) $\sqrt{0{,}1}$; 4) $\frac{1}{3}$. 652. 2) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. 653. 2) $-\frac{15}{17}$; 4) $-\frac{3}{4}$. 654. 2) $2\cos\alpha$; 4) $\sin 2\alpha$. 655. 2) $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$; 4) $\mathrm{tg}\,\alpha$. 656. 2) $\frac{120}{169}$, $\frac{5}{\sqrt{26}}$. 661. $\cos 4\alpha$. 662. 2) $x=4\pi k$, $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$; 4) $x=\frac{\pi k}{2}$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$; 6) $x=8\pi k$, $x=2\pi+4\pi k$, $k\in Z$; 8) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$. 663. 2) 60°; 4) 40°; 6) $\frac{3\pi}{10}$; 8) $\frac{\pi}{6}$. 664. 2) $\cos 58^\circ=\sin 32^\circ$; 4) $-\cos\frac{\pi}{3}$; 6) $-\mathrm{tg}\,35^\circ=-\mathrm{ctg}\,55^\circ$; 8) $\sin\frac{\pi}{6}$; 10) $\sin\frac{\pi}{7}$; 12) $-\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{10}$. 665. 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 6) $-\frac{1}{2}$; 8) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 666. 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $\frac{1}{2}$; 8) 1. 667. 2) -1. 668. 2) $\frac{1}{\cos\alpha}$. 669. 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 6) 1; 8) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 670. 2) $-\sqrt{2}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{3}-1$. 671. 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) -1. 675. 2) $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$; 4) $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$; 6) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$. 677. 2) 0; 4) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; 6) 0; 8) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 678. 2) $\sqrt{2}\sin\beta$; 4) $\sin 2\alpha$. 680. 2) $2\sin\alpha$. 682. 2) $4\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$; 6) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 8) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$. 684. 2) $\mathrm{tg}\,\beta$. 685. 2) $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}$, $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5}$, $k\in Z$; 4) $x=\pi k$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 6) $x=\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$;

8) $x = \frac{\pi k}{3}$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; 10) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **686.** 2) $-4\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$; 4) $\frac{2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **687.** 2) 4. **688.** 2) $\frac{\cos 2^\circ - \cos 24^\circ}{2}$; 4) $\frac{\cos 18^\circ + \cos 12^\circ}{2}$.

689. 2) $\frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2}$; 4) $\frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{2}$. **690.** 2) $\cos 70^\circ - \cos 130^\circ$. **691.** $\frac{5}{16}$.

693. $\frac{7}{18}$. **694.** $-\frac{3}{16}$. **695.** 2) $x = \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$; 4) $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **696.** 2) $\frac{1}{4}(\cos\alpha + \cos 5\alpha + \cos 9\alpha + \cos 15\alpha)$. **697.** 2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; 4) $-\sqrt{\frac{2}{3}}$. **698.** 2) $\cos^2\alpha$; 4) $\mathrm{ctg}^2\,\alpha$.

699. 2) 1; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **700.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. **704.** 2) $\frac{1}{4}$. **705.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **708.** $-4\sin 2\alpha$.

711. 2) 2. **712.** $\frac{11}{6}$. **713.** $-\frac{4}{9}$. **716.** 2) $\frac{9}{7}$. **719.** 2) 0; 4) $\frac{\pi}{3}$; 6) $\frac{3\pi}{4}$. **720.** 2) 2π; 4) 8π.

721. 2) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) 1. **722.** 2) -1; 4) 1; 6) -1. **723.** 2) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{3}{4}\pi$. **724.** 2) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} < \arccos 0$; 4) $\arccos(-1) > \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **725.** 2) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) < \arccos(-1)$.

726. 2) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; 4) $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$. **727.** 2) $x = \pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; 4) $x = \pm\arccos(-0{,}2) + 2\pi k$, $k \in Z$. **728.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; 4) $x = \pm\frac{\pi}{2} + 6\pi k$, $k \in Z$; 6) $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **729.** 2) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$; 6) $\frac{\pi}{6}$.

730. 2) $-\frac{2}{3}$; 4) $-0{,}3$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **731.** 2) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 6) $\frac{1}{2}$. **732.** 2) $\frac{24}{25}$. **733.** 2) a; 4) $-a$. **734.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. **735.** 2) Да; 4) нет; 6) да. **736.** 2) $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$; 4) $x = \pm\frac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in Z$. **737.** 2) $x = 2\pi k$, $k \in Z$; 4) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k$, $k \in Z$. **738.** 2) $x = -2{,}5$. **739.** $\pm\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$.

740. $\pm\frac{\pi}{16}$. **742.** 2) $\frac{\pi}{2}$, 4) $\frac{\pi}{6}$, 6) $-\frac{\pi}{3}$. **743.** 2) 0; 4) $-\frac{\pi}{2}$. **744.** 2) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\sqrt{3}$. **745.** 2) 0; 4) -1; 6) 0. **746.** 2) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **747.** 2) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{6}$. **748.** 2) $\frac{\pi}{3}$.

749. 2) 0. **750.** 2) $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right) > \arcsin(-1)$. **751.** 2) $x = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **752.** 2) $x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{7} + \pi n$, $n \in Z$;

4) $x=(-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3}+\pi n, n \in Z$. **753.** 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n \in Z$; 4) $x=(-1)^n \frac{2\pi}{3}+2\pi n, n \in Z$; 6) $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n \in Z$. **754.** 2) $x=(-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}+\pi n, n \in Z$; 4) нет корней. **755.** 2) $x=-\frac{2}{3}+(-1)^{n+1} \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}, n \in Z$. **756.** 2) $\frac{\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{4}$; 6) $\frac{\pi}{6}$; 8) $7-2\pi$. **757.** 2) $-\frac{1}{4}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 6) $-\frac{1}{5}$. **758.** 2) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{\sqrt{15}}{4}$; 6) 3. **759.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **760.** 2) $\frac{7}{25}$; 4) 1. **761.** 2) $\frac{7}{8}$. **762.** 2) Да; 4) нет; 6) нет. **763.** 2) $x=(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}, n \in Z$; 4) $x=(-1)^n \frac{3}{2} \arcsin \frac{1}{4}+\frac{3\pi n}{2}, n \in Z$. **764.** 2) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}, n \in Z$. **765.** 2) $x=(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6}+\pi n, x=(-1)^n \arcsin \frac{3}{4}+\pi n, n \in Z$; 4) $x=(-1)^n \arcsin \frac{1}{4}+\frac{\pi n}{3}, n \in Z$. **766.** $\frac{\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12}$; $\frac{17\pi}{12}$. **767.** $\frac{14\pi}{3}$. **768.** $\frac{\pi}{12}$. **769.** 2) $x=\frac{6+\sqrt{2}}{4}$. **772.** 2) $\frac{\pi}{2}$; 4) $-\frac{\pi}{6}$. **773.** 2) 0; 4) $-\frac{47\pi}{12}$. **774.** 2) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} < \operatorname{arctg} \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{arctg}(-1) > \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \arccos \frac{1}{2}$. **775.** 2) 1; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$. **776.** 2) $x=\frac{\pi}{3}+\pi n, n \in Z$; 4) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n \in Z$; 6) $x=-\operatorname{arctg} 5+\pi n, n \in Z$. **777.** 2) $x=\frac{\pi n}{3}, n \in Z$; 4) $x=-2\pi+6\pi n, n \in Z$. **778.** 2) 3,5; 4) -9; 6) $\frac{5}{4}$; 8) 2. **779.** 2) $-\frac{\pi}{6}$; 4) $-\frac{\pi}{4}$; 6) $\frac{\pi}{3}$; 8) 0. **780.** 2) $-0{,}3$; 4) -6. **781.** 2) 2; 4) $13-4\pi$. **782.** 2) $x=\frac{\pi}{3}+\pi n, x=-\frac{\pi}{6}+\pi n, n \in Z$; 4) $x=\operatorname{arctg} 4{,}5+\pi n, x=(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6}+\pi n, n \in Z$; 6) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, x=-\frac{3}{2}\pi+6\pi n, n \in Z$. **783.** 2) $\frac{3+\sqrt{3}}{5}$. **784.** 2) $x \approx -1{,}44+\pi n, n \in Z$. **785.** $\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$. **789.** 2) $\frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$. **790.** 2) $-\frac{\pi}{12}$; 4) $\frac{5\pi}{4}$. **791.** 2) $\frac{2\pi}{3}$. **792.** 2) $\sqrt{3}$. **793.** 2) $\frac{\pi}{6}$. **794.** 2) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) > \operatorname{arcctg}(-1)$; 4) $\arccos \frac{1}{2} = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$. **795.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n \in Z$; 4) $x=-\frac{\pi}{6}+\pi n, n \in Z$; 6) $x=\operatorname{arctg} \frac{1}{7}+\pi n, n \in Z$. **796.** 2) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, n \in Z$. **797.** 2) $x=\frac{3\pi}{28}+\pi n, n \in Z$. **798.** 2) $x=\frac{7\pi}{36}+\frac{\pi n}{3}, n \in Z$. **799.** 2) $x=-3-3\operatorname{arctg} \frac{5}{6}+3\pi n, n \in Z$. **800.** 2) $x=-\operatorname{arctg} \frac{1}{3}+\pi n, x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n \in Z$. **801.** 2) $x=-\frac{3\pi}{2}+6\pi n, x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n \in Z$; 4) $x=\pm\pi+8\pi n, x=-\frac{\pi}{3}+\pi n, n \in Z$. **802.** 2) $\frac{9\pi}{10}$. **804.** 2) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$,

$x=(-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in Z$; 4) корней нет. **805.** 2) $x=2\pi n,\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n \in Z$; 4) корней нет. **806.** 2) $x=(-1)^n \arcsin\frac{2}{3}+\pi n,\ n \in Z$; 4) $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n \in Z$. **807.** 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=\operatorname{arctg} 4+\pi n,\ n \in Z$; 4) корней нет. **808.** 2) $x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ x=-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in Z$. **809.** 2) $x=2\pi n,\ n \in Z$; 4) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in Z$. **810.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in Z$. **811.** 2) $x=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi n,\ x=\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\pi n,\ n \in Z$. **812.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n \in Z$. **813.** 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in Z$. **814.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n \in Z$. **815.** 2) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in Z$. **816.** 2) $x=\pi+2\pi n,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in Z$. **817.** $-2 \leqslant a \leqslant 2,\ x=\pm\arccos\frac{a}{2}+2\pi n,\ n \in Z$. **818.** $a \leqslant 1,\ a=\frac{3}{2},\ a \geqslant 3$. **819.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z$; 4) $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ n \in Z$. **820.** 2) $x=\operatorname{arctg} 2+\pi n,\ x=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ n \in Z$; 4) $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ x=-\operatorname{arctg} 2+\pi n,\ n \in Z$. **821.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi n,\ n \in Z$; 4) $x=\operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}+\pi n,\ n \in Z$; 6) корней нет. **822.** 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=\operatorname{arctg} 3+\pi n,\ n \in Z$; 4) $x=\operatorname{arctg} 3+\pi n,\ x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ n \in Z$; 6) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ n \in Z$. **823.** $a<-\frac{\sqrt{10}+1}{2},\ a>\frac{\sqrt{10}-1}{2}$. **824.** $a \leqslant -1,\ a \geqslant 1$; $x=\operatorname{arctg}(2a\pm\sqrt{3a^2-3})+\pi n,\ n \in Z$. **825.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n \in Z$; 4) $x=2\pi n,\ x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n \in Z$. **826.** 2) $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n \in Z$. **827.** 2) $x=\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi n}{5},\ x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5},\ n \in Z$. **828.** 2) $x=3\arcsin\frac{12}{13}+(-1)^{n+1}\times 3\arcsin\frac{1}{13}+3\pi n,\ n \in Z$; 4) $x=-2\arcsin\frac{24}{25}+(-1)^n 2\arcsin\frac{1}{25}+2\pi n,\ n \in Z$. **829.** $x=-\frac{\pi}{12}$. **830.** $x=\frac{\pi}{6}$. **831.** 2) $x=2\pi n,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in Z$. **832.** 2) $|a| \geqslant \sqrt{3}$. **833.** 2) $x=2\pi n,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in Z$; 4) $x=\pi+2\pi n,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in Z$; 6) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z$. **834.** $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=2\pi n,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in Z$. **835.** $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z$. **836.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n \in Z$. **837.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n \in Z$. **838.** $x=\pi n,\ x=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}+2\pi n,\ n \in Z$. **839.** $x=\frac{\pi}{7}+\pi n,\ n \in Z$. **840.** $x=\frac{7\pi}{18}+\pi n,\ n \in Z$.

841. $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **842.** $x = 2\pi n$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **843.** $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

844. $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **845.** $|a| \leqslant 1$; если $|a| \leqslant \frac{1}{3}$, то $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin 3a + \pi n$; если $\frac{1}{3} < |a| \leqslant 1$, то $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$. **846.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 6) $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 8) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

847. 2) $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

848. 2) $x = \frac{\pi n}{8}$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$. **849.** 2) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. **850.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $x = \frac{3\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7}$, $n \in Z$; 6) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **851.** 2) $x = \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$; 6) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

852. 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **853.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in Z$. **854.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **855.** 2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

856. 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **857.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **858.** 2) $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{22} + \frac{2\pi n}{11}$, $n \in Z$. **859.** 2) Корней нет; 4) $x = \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$. **860.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = (-1)^n \frac{1}{2} \arcsin\frac{1}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

861. 2) Корней нет. **862.** 2) $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$. **863.** 2) $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

864. 2) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; 4) корней нет. **865.** $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$, $x = \pm\frac{1}{4} \arccos(4a - 3) + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **866.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **867.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = -\arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. **868.** 2) $x = \pi n$, $n \in Z$. **869.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

870. 2) $x = \pi + 2\pi n$, $x = \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. **871.** 2) $x = \pi n$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{3} + \pi n$, $n \in Z$. **872.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$;

4) $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. **873.** 2) $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. **874.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=-\frac{5\pi}{12}+2\pi n$, $x=-\frac{7\pi}{12}+2\pi n$, $n\in Z$. **875.** 2) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(k+2n),\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(k-2n)\right)$, $k\in Z$, $n\in Z$. **876.** 2) $\left(\pi n,\ \frac{\pi}{4}-\pi n\right)$, $n\in Z$. **877.** $\left((-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$. **878.** $\left((-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$. **879.** $\left(\frac{\pi}{4}+\pi\left(k+\frac{n}{2}\right), -\frac{\pi}{4}+\pi\left(\frac{n}{2}-k\right)\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$. **880.** $\left(\pm\frac{\pi}{6}+\pi(n+k),\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$. **881.** $\left(n, n+\frac{1}{4}\right)$, $\left(n-\frac{1}{4}, n\right)$, $n\in Z$. **882.** $\left((-1)^n\arcsin\frac{7}{8}+\right.$ $\left.+\pi(n+2k), (-1)^n\arcsin\frac{1}{4}+\pi n\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$. **883.** $\left(n+k-\frac{1}{6}, n-k-\frac{1}{6}\right)$, $\left(n+k+\frac{1}{6}, n-k+\frac{1}{6}\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$. **884.** $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \frac{5\pi}{4}+\left(2k+\frac{n}{2}\right)\pi\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$. **885.** $\left(\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}+(-1)^k\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+\pi k\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$. **886.** $\left(\frac{\pi n}{2}\pm\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{5},\ 2\pi k\pm\arccos\frac{1}{4}\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$. **887.** $\left((-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\right.$ $\left.\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$. **888.** $x=\pi+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $x=\frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. **889.** Корней нет. **890.** $x=\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. **891.** $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. **892.** $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in Z$. **893.** $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$. **894.** $x=2\pi n$, $x=\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+2\pi n$, $n\in Z$. **895.** $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$. **896.** 2) $-\frac{7\pi}{4}$; 4) $\frac{3\pi}{2}$; 6) 0. **897.** 2) $x=-2\pm\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{9}\pm\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$. **898.** 2) $x=\frac{\pi}{3}+4\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{1}{2}+(-1)^n\times$ $\times\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{5}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. **899.** 2) $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. **900.** 2) $x=\frac{5\pi}{36}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{3\pi}{28}+\pi n$, $n\in Z$. **901.** 2) $x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+$ $+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. **902.** 2) $x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{39}-3}{4}+\pi n$, $n\in Z$. **903.** 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\operatorname{arctg}1{,}5+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. **904.** 2) $x=-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{5}{4}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$. **905.** 2) Корней нет. **906.** 2) $x=\frac{\pi n}{2}$,

$n \in Z$. **907.** 2) $x = \frac{\pi n}{5}$, $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. **908.** 2) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) 1. **909.** 2) $-\frac{1}{4}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 6) $-\frac{1}{5}$. **910.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **911.** 2) $x = \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **912.** 2) $\pm\frac{1}{2} \times \arccos\frac{15-\sqrt{113}}{8} + \pi n$, $n \in Z$. **913.** 2) $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **914.** 2) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **915.** 2) $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in Z$. **916.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. **917.** 2) $x = \pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. **918.** 2) $x = (-1)^n \times \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **919.** 2) $x = \pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{22} + \frac{2\pi n}{11}$, $n \in Z$. **920.** 2) $x = \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; 6) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **921.** 2) $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; 4) $x = 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in Z$. **922.** $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **923.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi n}{7}$, $n \in Z$. **924.** $x = \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$. **925.** $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **926.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \arcsin\frac{1}{4} + (2n+1)\pi$, $n \in Z$. **927.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **928.** 2) $\left((-1)^{k+n}\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \pi(k+n),\ (-1)^{k+n}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \pi(k-n)\right)$, $k \in Z$, $n \in Z$. **929.** 2) $\left((-1)^n \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\pi}{4} + \pi n,\ (-1)^{k+1}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in Z$, $n \in Z$. **930.** $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **931.** $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \pi n$, $n \in Z$. **932.** 2) $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 6) корней нет. **933.** 2) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; 4) корней нет. **934.** $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **935.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

936. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **937.** $x = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$, $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in Z$. **938.** $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. **939.** 2) $\left(\frac{\pi}{3}(6n+1), \frac{\pi}{3}(6k-1)\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}(6n-1), \frac{\pi}{3}(6k+1)\right)$, $n \in Z$, $k \in Z$. **940.** $\frac{1}{16} \leqslant a \leqslant 1$.

Проверь себя! (гл. VI)

1. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$. **2.** 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** 1) $\sin\alpha\cos\beta$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\cos(\alpha - \beta)$.

Проверь себя! (гл. VII)

1. 1) 0; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** 1) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; 3) $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 5) $x = \pi n$, $n \in Z$.

Глава VIII

945. 1) 5π; 2) $\frac{4\pi}{3}$; 3) 2π; 4) π. **946.** 1) 2π; 2) 2π. **949.** 1) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; 2) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$; 3) $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; 4) $\left[-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$.

950. 1) $\sin\frac{7\pi}{10} > \sin\frac{13\pi}{10}$; 2) $\sin\frac{13\pi}{7} > \sin\frac{11\pi}{7}$; 3) $\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right) < \sin\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$; 4) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right) > \sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$; 5) $\sin 3 > \sin 4$; 6) $\sin 7 > \sin 6$; 7) $\sin(-3) > \sin(-2)$; 8) $\sin(-1) > \sin(-1{,}5)$. **951.** 1) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6} < x < \frac{17\pi}{6}$; 2) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4} \leqslant x \leqslant 3\pi$; 3) $0 \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6} \leqslant x \leqslant 3\pi$; 4) $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$.

952. 1) $\sin\frac{\pi}{9} < \cos\frac{\pi}{9}$; 2) $\sin\frac{9\pi}{8} > \cos\frac{9\pi}{8}$; 3) $\sin\frac{\pi}{5} > \cos\frac{5\pi}{14}$; 4) $\sin\frac{\pi}{8} < \cos\frac{3\pi}{10}$.

953. 1) $-\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant -\frac{17\pi}{12}$, $-\frac{13\pi}{12} \leqslant x \leqslant -\frac{5\pi}{12}$, $-\frac{\pi}{12} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12} \leqslant x \leqslant \pi$; 2) $-\frac{3\pi}{2} \leqslant x < -\frac{11\pi}{9}$, $-\frac{10\pi}{9} < x < -\frac{5\pi}{9}$, $-\frac{4\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9} < x < \frac{7\pi}{9}$, $\frac{8\pi}{9} < x \leqslant \pi$; 3) $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi$; 4) $-\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant -\frac{3\pi}{4}$. **955.** 1) $0 \leqslant y \leqslant 1$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-1 \leqslant y \leqslant 1$; 4) $-1 \leqslant y \leqslant 1$. **960.** 1) $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; 3) $[0; \pi]$, $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$; 4) $[-\pi; 0]$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. **961.** 1) $\cos\frac{\pi}{7} > \cos\frac{8\pi}{9}$; 2) $\cos\frac{8\pi}{7} < \cos\frac{10\pi}{7}$; 3) $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right) < \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; 4) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right) < \cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$; 5) $\cos 1 > \cos 3$; 6) $\cos 4 < \cos 5$.

962. 1) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{3}$; 2) $0 \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{8\pi}{3}$; 3) $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4} < x \leqslant 3\pi$; 4) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6} < x \leqslant 3\pi$. **963.** 1) $x \in \boldsymbol{R}$; 2) $x \in \boldsymbol{R}$; 3) $x \neq 0$; 4) $x \neq 0$; 5) $x \geqslant 0$; 6) $x < -1$, $x \geqslant 1$. **964.** 1) $0 \leqslant y \leqslant 2$; 2) $0 \leqslant y \leqslant 2$; 3) $1 \leqslant y \leqslant 5$; 4) $-3 \leqslant y \leqslant 5$; 5) $\frac{3}{2} \leqslant y \leqslant \frac{5}{2}$; 6) $-1{,}25 \leqslant y \leqslant -0{,}75$. **965.** 1) $\cos\frac{\pi}{5} > \sin\frac{\pi}{5}$; 2) $\sin\frac{\pi}{7} < \cos\frac{\pi}{7}$; 3) $\cos\frac{5\pi}{8} < \sin\frac{5\pi}{8}$; 4) $\sin\frac{3\pi}{5} > \cos\frac{3\pi}{5}$; 5) $\cos\frac{\pi}{6} < \sin\frac{5\pi}{14}$; 6) $\cos\frac{\pi}{8} > \sin\frac{3\pi}{10}$. **966.** 1) $-\frac{\pi}{2} \leqslant x < -\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6} < x \leqslant \frac{3\pi}{2}$; 2) $-\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12} < x < \frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{17\pi}{12}$. **968.** 1) $-1 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < y < \frac{\sqrt{2}}{2}$. **969.** 1) $x \in \boldsymbol{R}$; 2) $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **970.** 1) $x \neq \pi n$, $x \neq (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $x \neq \pi n$, $x \neq \frac{(1+2n)\pi}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **971.** 1) $-1 \leqslant y \leqslant 3$; 2) $-1 \leqslant y \leqslant 1$; 3) $\frac{1}{4} \leqslant y \leqslant \frac{9}{4}$; 4) $1 \leqslant y \leqslant 19$; 5) $-1 \leqslant y \leqslant 1$; 6) $-\sqrt{3} \leqslant y \leqslant \sqrt{3}$.

977. 1) $\operatorname{tg} 15^\circ < \operatorname{tg} 25^\circ$; 2) $\operatorname{tg}(-80^\circ) < \operatorname{tg}(-50^\circ)$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{6\pi}{7}\right) > \operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$; 4) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} > \operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}$; 5) $\operatorname{tg} 2 < \operatorname{tg} 3$; 6) $\operatorname{tg} 1 < \operatorname{tg} 1{,}5$; 7) $\operatorname{tg}(-1) > \operatorname{tg}(-1{,}5)$; 8) $\operatorname{tg}(-2) > \operatorname{tg}(-3)$. **978.** 1) $\operatorname{ctg} 35^\circ > \operatorname{ctg} 67^\circ$; 2) $\operatorname{ctg} 95^\circ > \operatorname{ctg} 117^\circ$; 3) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{5}\right) > \operatorname{ctg}\frac{4\pi}{7}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{8}\right) < \operatorname{ctg}\frac{\pi}{9}$; 5) $\operatorname{ctg} 1{,}2 > \operatorname{ctg} 1{,}5$; 6) $\operatorname{ctg} 2 >$ $> \operatorname{ctg} 3$. **979.** 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) нет; 5) нет; 6) нет; 7) да; 8) да. **980.** 1) $-\frac{3\pi}{4} \leqslant x < -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{4} \leqslant x < \frac{3\pi}{2}$; 2) $-\pi \leqslant x < -\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2} < x \leqslant 2\pi$; 3) $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{4}$; 4) $-\pi \leqslant x < -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3} \leqslant x < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3} \leqslant x \leqslant 2\pi$. **981.** 1) $0 < x < \frac{5\pi}{6}$; 2) $0 < x \leqslant \frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{4} \leqslant x < \pi$; 4) $\frac{\pi}{6} < x < \pi$; 5) $\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{3\pi}{4}$; 6) $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

982. 1) $\operatorname{arctg} 3 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, $\pi + \operatorname{arctg} 3 \leqslant x < \frac{3\pi}{2}$, $2\pi + \operatorname{arctg} 3 \leqslant x < \frac{5\pi}{2}$; 2) $0 \leqslant x <$ $< \operatorname{arctg} 4$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi + \operatorname{arctg} 4$, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi + \operatorname{arctg} 4$, $\frac{5\pi}{2} < x \leqslant 3\pi$; 3) $\frac{\pi}{2} < x \leqslant$ $\leqslant \pi - \operatorname{arctg} 4$, $\frac{3\pi}{2} < x \leqslant 2\pi - \operatorname{arctg} 4$, $\frac{5\pi}{2} < x \leqslant 3\pi - \operatorname{arctg} 4$; 4) $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, $\pi - \operatorname{arctg} 3 < x < \frac{3\pi}{2}$, $2\pi - \operatorname{arctg} 3 < x < \frac{5\pi}{2}$, $3\pi - \operatorname{arctg} 3 < x \leqslant 3\pi$; 5) $0 < x <$ $< \operatorname{arcctg} 2$, $\pi < x < \pi + \operatorname{arcctg} 2$, $2\pi < x < 2\pi + \operatorname{arcctg} 2$; 6) $\operatorname{arcctg}(-3) \leqslant x < \pi$, $\pi + \operatorname{arcctg}(-3) \leqslant x < 2\pi$, $2\pi + \operatorname{arcctg}(-3) \leqslant x < 3\pi$. **983.** 1) $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant -\frac{3\pi}{8}$, $-\frac{\pi}{4} < x \leqslant \frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4} < x \leqslant \frac{5\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{4} < x \leqslant \pi$; 2) $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{4\pi}{9}$, $-\frac{\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{9}$, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{9}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{9}$, $\frac{5\pi}{6} < x < \frac{8\pi}{9}$; 3) $0 < x < \frac{2\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, $\frac{3\pi}{4} \leqslant$ $\leqslant x < \pi$. **985.** 1) $-1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$; 2) $y > -1$; 3) $y < 0$; 4) $y \leqslant -1$. **989.** 1) $\pi + 2\pi n <$ $< x < 2\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $2\pi n \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $x \in \boldsymbol{R}$; 4) $x \in \boldsymbol{R}$; 5) решений нет; 6) решений нет; 7) $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 8) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

990. 1) $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

3) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{7\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $-\frac{7\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$.

991. 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; 2) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; 3) $x\in R$; 4) $x\in R$; 5) решений нет; 6) решений нет; 7) $x=2\pi n$, $n\in Z$; 8) $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$. **992.** 1) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$; 2) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; 3) $\frac{\pi}{3}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 5) $(2\pi+1)\pi-\arccos\frac{1}{3}<x<(2\pi-1)\pi+\arccos\frac{1}{3}$, $n\in Z$; 6) $-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n\leqslant x\leqslant\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. **993.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\pi+\pi n$, $n\in Z$; 2) $\pi n\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; 3) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x\leqslant\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $\frac{\pi}{3}+\pi n\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; 5) $\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 6) $\frac{3\pi}{4}+\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; 7) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x\leqslant\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in Z$; 8) $-\operatorname{arctg}2+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. **994.** 1) $\frac{5\pi}{12}+\pi n<x<\frac{13\pi}{12}+\pi n$, $n\in Z$; 2) $\frac{\pi}{3}+\pi n<x<\frac{2\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 3) $-\pi+2\pi n<x\leqslant\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $\frac{\pi n}{3}<x\leqslant\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$.

995. 1) $-\frac{\pi}{12}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+2\pi n$, $n\in Z$; 2) $\frac{\pi}{12}+2\pi n<x<\frac{7\pi}{12}+2\pi n$, $n\in Z$; 3) $\frac{\pi}{6}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $\frac{\pi}{6}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. **996.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 2) $\pi n<x<\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\frac{3\pi}{4}+\pi n<x<\pi+\pi n$, $n\in Z$.

997. 1) $\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; 2) $\frac{\pi}{3}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 3) $\frac{\pi}{4}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n<x<\pi+2\pi n$, $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n<x<2\pi n$, $n\in Z$. **998.** 1) $\pi+2\pi n<x<\frac{7\pi}{6}+2\pi n$, $-\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<2\pi n$, $n\in Z$; 2) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$. **999.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n<$

$< x \leqslant \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; 2) $\pi n < x \leqslant \frac{\pi}{6} + \pi n,\ \frac{5\pi}{6} + \pi n \leqslant x < \pi + \pi n,\ n \in Z$.

1000. 1) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{13\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{3} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

1001. 1) $\arcsin \frac{2}{3} < \arcsin \frac{3}{4}$; 2) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} < \arcsin \frac{2}{\sqrt{10}}$; 3) $\arcsin \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) >$ $> \arcsin \left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$; 4) $\arcsin \left(-\frac{2}{3}\right) > \arcsin \left(-\frac{3}{4}\right)$. **1002.** 1) $\arccos \frac{1}{3} < \arccos \frac{2}{7}$; 2) $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}} < \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$; 3) $\arccos \left(-\frac{3}{5}\right) > \arccos \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$; 4) $\arccos \left(-\frac{4}{5}\right) >$ $> \arccos \left(-\frac{1}{3}\right)$. **1003.** 1) $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} > \operatorname{arctg} \frac{1}{4}$; 2) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3} < \operatorname{arctg} 3\sqrt{2}$; 3) $\operatorname{arctg} (-3\sqrt{4}) > \operatorname{arctg} (-4\sqrt{3})$; 4) $\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. **1004.** 1) $x = \frac{1}{2}$; 2) $x = \frac{6-\sqrt{2}}{4}$; 3) $x = 2 - 2\sqrt{2}$; 4) $x = -3 - \sqrt{3}$. **1005.** 1) $x = -\frac{5}{4}$; 2) $x = -\frac{1}{3}$; 3) $x = -\frac{5}{2}$; 4) $x = -1$. **1006.** 1) $x = 1 - 4\sqrt{3}$; 2) $x = 1$; 3) $x = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; 4) $x = 1$.

1007. 1) $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$; 2) $1 \leqslant x \leqslant 5$; 3) $1 \leqslant x \leqslant 2$; 4) $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$; 5) $0 \leqslant x \leqslant 9$; 6) $1 \leqslant x \leqslant 4$; 7) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 8) $-2 \leqslant x \leqslant -1,\ 1 \leqslant x \leqslant 2$. **1009.** 1) $x \in R$; 2) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; 3) $2\pi n \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi n,\ n \in Z$; 4) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; 5) $x \neq (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$; 6) $x \neq \pi n,\ x \neq (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **1010.** 1) $-1 \leqslant y \leqslant 1$; 2) $-1 \leqslant y \leqslant 1$; 3) $1 \leqslant y \leqslant 3$; 4) $5 \leqslant y \leqslant 7$; 5) $3 \leqslant y \leqslant 5$; 6) $-4 \leqslant y \leqslant -2$. **1011.** 1) Четная; 2) нечетная; 3) четная; 4) не является четной и не является нечетной. **1012.** 1) $\frac{2\pi}{7}$; 2) 14π. **1013.** 1) $\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$; 4) $\pi,\ 3\pi$. **1014.** 1) $-2\pi \leqslant x \leqslant -\frac{4\pi}{3}$; 2) $-\frac{11\pi}{6} < x < -\frac{7\pi}{6}$; 3) $-2\pi \leqslant x < -\frac{3\pi}{2},\ -\pi - \operatorname{arctg} 2 < x \leqslant -\pi$; 4) $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} - 2\pi \leqslant$ $\leqslant x < -\frac{3\pi}{2}$. **1015.** 1) Два; 2) один. **1016.** 1) $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$; 2) $\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 3) $x \in R$; 4) $\frac{\pi}{3} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ -\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

1017. 1) 1 и −1; 2) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$; 3) 1 и −1; 4) 1 и −2. **1018.** 1) Нечетная; 2) четная; 3) четная; 4) нечетная. **1019.** 1) π; 2) 4π. **1020.** 1) Два; 2) корней нет. **1021.** 1) $x = \pi n$, $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $x = 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 3) $x = \pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{2\pi n}{3}$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **1022.** 1) $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **1023.** $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **1024.** $-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **1026.** 1) $-13 \leqslant y \leqslant 13$; 2) $-1 \leqslant y \leqslant \frac{5}{4}$; 3) $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$; 4) $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$. **1027.** 1) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 3) $-\frac{\pi}{12} + 2\pi n < x < \frac{17}{12} + 2\pi n$, $n \in Z$; 4) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < (1+n)2\pi$, $n \in Z$. **1028.** 1) $\frac{\pi}{6} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{3} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 3) $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$; 4) $-\sqrt{5} \leqslant x \leqslant -\sqrt{3}$, $\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{5}$.

Проверь себя!

1. $x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$; нет, не является. **2.** Для синуса: $y(x) = 1$ при $x = \frac{\pi}{2}$, $y(x) = -1$ при $x = -\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$, $y(x) = 0$ при $x = -\pi$; 0; π; 2π, $y(x) > 0$ при $0 < x < \pi$, $y(x) < 0$ при $-\pi < x < 0$, $\pi < x < 2\pi$, отрезки возрастания $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$, отрезки убывания $-\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$; для косинуса: $y(x) = 1$ при $x = 0$; 2π, $y(x) = -1$ при $x = \pm\pi$, $y(x) = 0$ при $x = -\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$, $y(x) > 0$ при $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, $y(x) < 0$ при $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, отрезки возрастания $-\pi \leqslant x \leqslant 0$, $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, отрезок убывания $0 \leqslant x \leqslant \pi$. **3.** $\operatorname{tg} x = 0$ при $x = -\pi$, 0; $\operatorname{tg} x < 0$ при $-\frac{3\pi}{2} < x < -\pi$, $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, $\operatorname{tg} x > 0$ при $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. **4.** $-\frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Формулы сокращенного умножения

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

Свойства степени

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$(ab)^m = a^m b^m$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

Свойства квадратного корня

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$

$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ a \geqslant 0,\ b > 0$

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

$\sqrt{a^2} = |a|$

Арифметическая прогрессия

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,\ S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

Геометрическая прогрессия

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q - 1},\ S_n = \dfrac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$

$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$

Таблица квадратов чисел до 30

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841

Таблица некоторых степеней однозначных чисел

Основание	Показатель								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729				
5	25	125	625	3125					
6	36	216	1296						
7	49	343							

Оглавление

Учебное издание

Колягин Юрий Михайлович, **Сидоров** Юрий Викторович, **Ткачева** Мария Владимировна и др.

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10 класс

УЧЕБНИК

для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень)

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*. Редактор *Е. В. Смольникова*
Оформление и художественное редактирование: *И. В. Цыцарева*
Технический редактор *И. Л. Ткаченко*
Корректоры *И. Н. Баханова, Л. В. Дьячкова*
Компьютерная верстка: *Т. В. Батракова*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.003577.04.09 от 06.04.2009.

Подписано в печать 30.06.09. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,0.
Тираж 25 000 экз. Заказ № 23168 (к-см).

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 5627, 367 6781; факс: 8 (499) 165 9218.
E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина»
(розничная и мелкооптовая продажа книг, «КНИГА — ПОЧТОЙ»).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел./факс: 8 (495) 783 8284; тел.: 8 (495) 783 8285.
E-mail: magazin@mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: 8 (495) 665 6031 (многоканальный). E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в ОАО «Смоленский полиграфический комбинат».
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}, \quad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$\cos x = a$$
$$x = \pm\arccos a + 2\pi n, \ n \in Z$$

$$\sin x = a$$
$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in Z$$

$$\operatorname{tg} x = a$$
$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \ n \in Z$$

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$a^{\log_a b} = b, \quad \log_a b^r = r\log_a b$$

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Алгебра

и начала математического анализа

10

Профильный уровень

ISBN 978-5-346-01315-0

9 785346 013150