29 октября математика 1 курс юристы.

Тема урока: «Геометрические преобразования пространства»

Сегодня мы познакомимся с новой темой «Геометрические преобразования пространства».

4. Актуализация опорных знаний.

- Какие преобразования плоскости вы знаете?
- Какое преобразование плоскости называется подобием?
- Сформулируйте свойства подобия
- Приведите примеры фигур, которые подобны себе при любом коэффициенте подобия.
- Верно ли, что любые две окружности подобны?

5 . Изучение нового материала.

1) В алгебре рассматриваются различные функции. Функция f каждому числу x из области определения функции ставит в соответствие некоторое число $f(x)$ – значение функции f в точке x . В геометрии рассматриваются функции, у которых другие области определения и множества значений. Они каждой точке ставят в соответствие точку. Эти функции называются **геометрическими преобразованиями**.

Геометрические преобразования имеют большое значение в геометрии. С помощью геометрических преобразований определяются такие важные геометрические понятия, как равенство и подобие фигур. Благодаря геометрическим преобразованиям, многие разрозненные факты геометрии укладываются в стройную теорию.

Для начала обратимся к некоторым основным понятиям, которые будут необходимы нам для работы с преобразованиями. Остановимся на двух терминах: расстояние и преобразование. Итак, что мы будем понимать под этими словами:

Определение. Расстоянием между двумя точками будем называть длину отрезка с концами в этих точках.

Определение. Преобразованием пространства называется взаимно-однозначное отображение пространства на себя.

Из этого определения следует важный вывод: *при любом преобразовании пространства образы любых двух различных точек пространства различны и любые две различные точки пространства являются образами двух его различных точек*.

Теперь перейдём к рассмотрению отдельных видов геометрических преобразований.

Центральная симметрия:

Введем определение центральной симметрии.

Преобразование пространства, при котором каждая точка пространства отображается на точку, симметричную ей относительно точки O , называется **центральной симметрией** пространства относительно точки O . При этом точка O отображается на себя и называется центром симметрии.

Примерами центральной симметрии являются: автомобильное колесо, окружность, куб, шар, снежинка, цветок и тд.

Движения в пространстве.

Симметрия относительно плоскости (зеркальная симметрия):

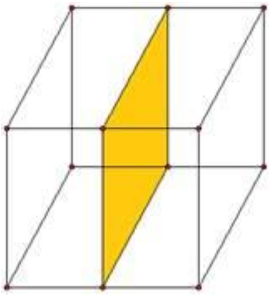
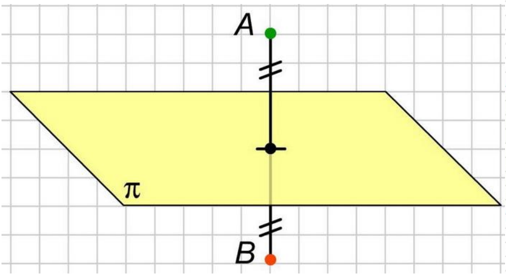
Определение. Преобразование пространства, при котором сохраняются расстояния между любыми двумя точками, называется движением пространства.
Свойства: при движении в пространстве прямые переходят в прямые, полупрямые – в полупрямые, отрезки – в отрезки, плоскости – в плоскости; сохраняются углы между полупрямыми.

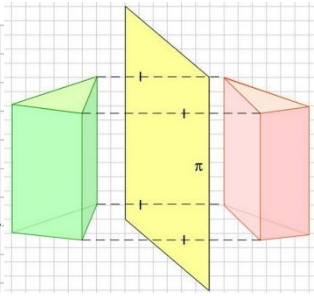
Две фигуры называются равными, если они совмещаются движением.

В качестве примера движения пространства на данном этапе изучения стереометрии можно привести преобразование центральной симметрии, доказав координатным способом, что при этой симметрии сохраняются расстояния между точками.
Введем понятие симметрии относительно плоскости:

Определение. Преобразование пространства, при котором каждая точка пространства отображается на точку, симметричную ей относительно плоскости α, называется симметрией пространства относительно плоскости α. Плоскость α называется плоскостью симметрии.

Примеры симметрии относительно плоскости:

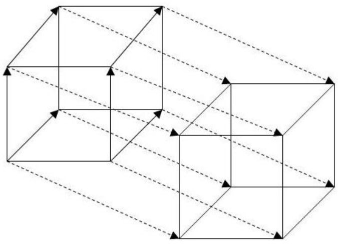
 

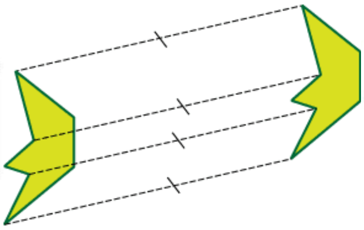


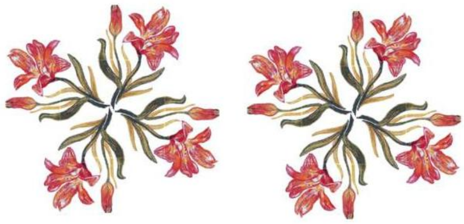
Параллельный перенос:

Определение. Параллельным переносом на вектор называется такое преобразование пространства, при котором любая точка M отображается на такую точку M', что выполняется векторное равенство $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$. Это перенос (движение) всех точек пространства в одном и том же направлении, на одно и то же расстояние

Если плоскость (прямая) не параллельна вектору переноса, то при переносе на этот вектор она отображается на параллельную ей плоскость (прямую).
Примеры параллельного переноса:

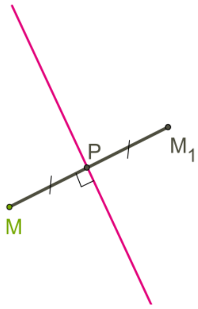


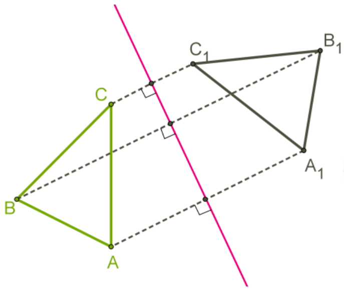




Осевая симметрия:

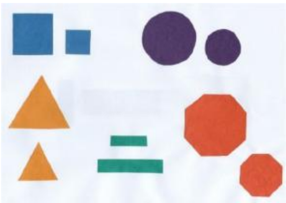
Определение. Осевая симметрия — это симметрия относительно проведённой прямой (оси).





Подобие:

Определение. Преобразования фигуры F в фигуру F' называется преобразования **подобия**, если при этом преобразовании расстояние между точками изменяется в одно и тоже число раз. То есть преобразование, которое сохраняет форму фигуры, но изменяет их размеры.

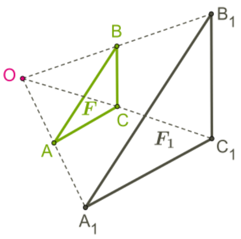


Гомотетия:

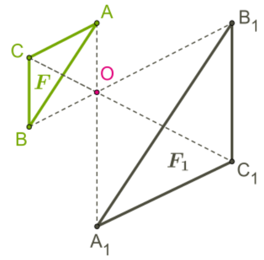
Определение. Гомотетия — это преобразование подобия. Это преобразование, в котором получаются подобные фигуры (фигуры, у которых соответствующие углы равны и стороны пропорциональны).

Чтобы гомотетия была определена, должен быть задан центр гомотетии и коэффициент. Это можно записать: гомотетия $(O;k)$.

На рисунке из фигуры F можно получить фигуру F_1 гомотетией $(O;2)$.



Если фигуры находятся на противоположных направлениях от центра гомотетии, то коэффициент отрицательный.
На следующем рисунке из фигуры F можно получить фигуру F_1 гомотетией $(O;-2)$.



В отличие от гомотетии, геометрические преобразования — центральная симметрия, осевая симметрия, поворот, параллельный перенос являются движением, т.к. в них фигура отображается в фигуру, равную данной.

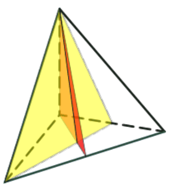
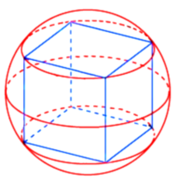
Гомотетичные фигуры подобны, но подобные фигуры не всегда гомотетичны (в гомотетии важно расположение фигур).
В орнаментах (на рисунке фракталы) можно видеть бесконечное множество подобных фигур, но обычно они не гомотетичны, т.к. у них невозможно определить центр гомотетии.

Задача 1. Можно ли взаимно-однозначно отобразить: а) поверхность куба на поверхность другого куба; б) поверхность куба на сферу; Сделайте соответствующие рисунки.

Решение. а) Достаточно кубы расположить так, чтобы совпали их центры, а грани одного были параллельны граням другого. Тогда поверхность одного куба взаимно-однозначно отображается на поверхность другого куба посредством центрального проектирования из их общего центра. (Аналогичная задача планиметрии — о взаимно-однозначном отображении одного квадрата на другой посредством центрального проектирования.)

б) Достаточно центр сферы совместить с центром куба, тогда поверхность куба взаимно-однозначно отображается на сферу посредством центрального проектирования из их общего центра. (Аналогичная задача планиметрии — о взаимно-однозначном отображении квадрата — замкнутой ломаной — на окружность посредством центрального проектирования.)

Задача 2. Нарисуйте треугольную пирамиду, имеющую две плоскости симметрии.

Указание. Рассмотрите пирамиду $PABC$, в которой лишь $AP = BP = AC = BC$.
6. Закрепление изученного материала.
Решаем задания № 276, 277 (Атанасян Л.С. «Геометрия» 10-11 класс).

Записать определения в тетради и выполнить задания
И прислать на электронную почту.