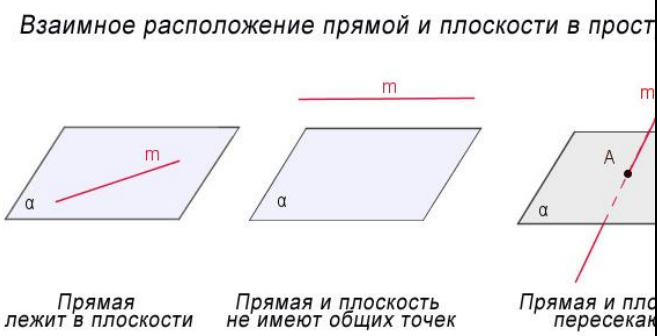
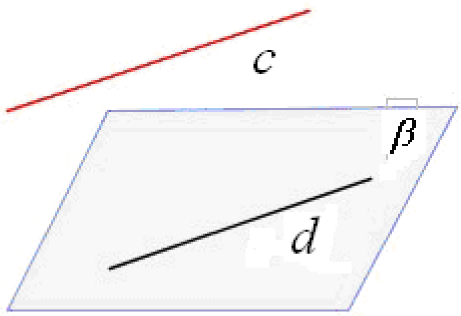
28 октября математика 1 курс технологи.

Лекция по теме «Параллельность прямой и плоскости. Параллельность плоскостей.»

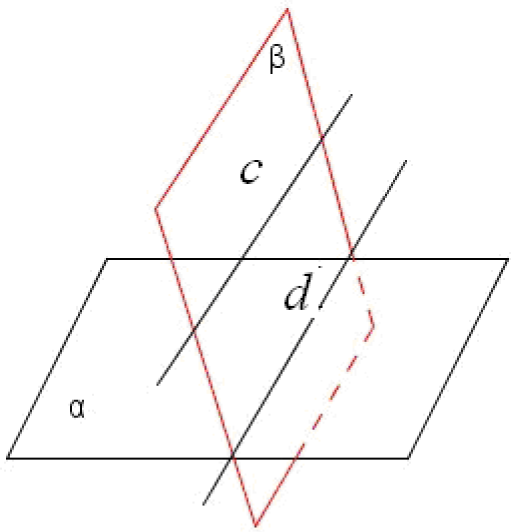
В этом уроке мы рассмотрим возможные случаи взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве, введем понятие параллельности прямой и плоскости, докажем признак параллельности прямой и плоскости.	
Возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве: 1. Прямая лежит на плоскости; 2. Прямая пересекает плоскость, т. е. прямая и плоскость имеют одну общую точку; 3. Прямая и плоскость не имеют общих точек.	Картинка 
Определение. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек Параллельность прямой А и плоскости α обозначается так: $a \parallel \alpha$	Текст Определение. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек Параллельность прямой А и плоскости α обозначается так: $a \parallel \alpha$
Теорема (признак параллельности прямой и плоскости) Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости. Дано: Плоскость β Прямая c не лежит в плоскости β Прямая d лежит в этой плоскости β параллельна d Доказать: Прямая а параллельна плоскости β Доказательство. Доказательство будем вести от противного. Предположим: прямая с не параллельна плоскости β. Тогда она пересекает плоскость β в некоторой точке F.	Текст Теорема (признак параллельности прямой и плоскости) Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости. Картинка  Текст Дано:

<table>
<tr>
<td>По лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми, прямая d также пересекает эту плоскость.
Пришли к противоречию, по условию d лежит в плоскости β. Предположение не верно, прямая c параллельна плоскости β.
Что и требовалось доказать.</td>
<td>$C \not\subset \beta$, $d \subset \beta$, $c \parallel b$, то $c \parallel \beta$
Доказать: $c \parallel \beta$

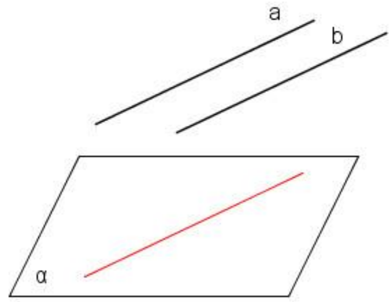
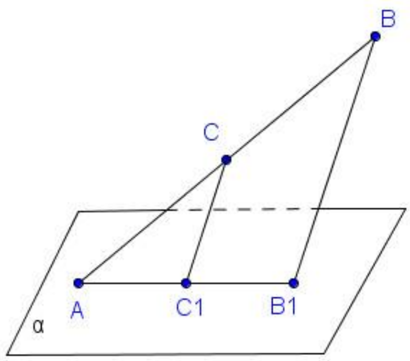
Доказательство.
Предположим: $c \nparallel \beta$
Тогда: $c \cap \beta = F$. Так как $c \parallel d$, то
d ∩ $d = F1F_1$ (по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми)
Противоречие. По условию $d \subset \beta$.
Предположение неверно, $c \parallel \beta$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Докажем еще два утверждения, которые часто используются при решении задач.
1.
Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то лини пересечения плоскостей параллельна данной прямой.
Если c $\subset \beta$, $c \parallel \alpha$, $\beta \cap \alpha = d$, то
Доказательство.
По определению, прямые называются параллельными, если:
1) прямые лежат в одной плоскости;
2) прямые не пересекаются.

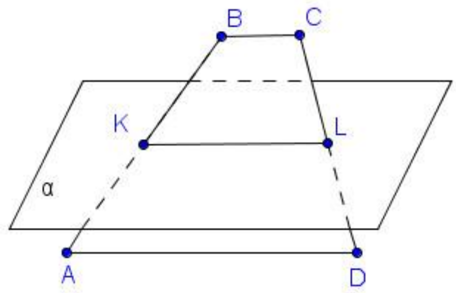
Так как по условию плоскость βпроходит через прямую c, а прямая d является общей для плоскостей
α и β (их линией пересечения), то c и d лежат в одной плоскости (плоскости β).

Так как прямая *c* параллельна плоскости α, в которой лежит прямая d, то c и d не пересекаются.
Оба условия параллельности выполняются.
Можно сделать заключение: $d \parallel c$.
Что и требовалось доказать</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Текст
Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линии пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Картинка


Текст
Дано:
$c \subset \beta$
$c \parallel \alpha$
$\beta \cap \alpha = d$
Доказать: $d \parallel c$
Доказательство.
Так как $\left.\begin{matrix} c \subset \beta \\ d = \beta \cap \alpha \end{matrix}\right\}$ то a и b лежат в одной плоскости
Если $\left.\begin{matrix} c \parallel \alpha \\ d \subset \alpha \end{matrix}\right\}$ то c и d не пересекаются.
Оба условия параллельности выполняются.
Делаем заключение: $d \parallel c$.
ч.т.д.</td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td>Текст</td>
</tr>
</table>

Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости. Дано: $a \parallel b$ $a \parallel \alpha$ Доказать: $b \parallel \alpha$, или $b \subset \alpha$ Доказательство. Так как $a \parallel \alpha$, то прямая а не пересекается с плоскостью α. Если а не пересекает плоскость, то и параллельная ей прямая b ее не пересекает(по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми). Поэтому прямая b либо параллельна плоскости, либо лежит в ней. Что и требовалось доказать.	Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости. Картинка  Текст Дано: $a \parallel b$ $a \parallel \alpha$ Доказать: $b \parallel \alpha$, или $b \subset \alpha$ Доказательство $a \parallel \alpha \Rightarrow$ а не пересекается с α $a \parallel b \Rightarrow$ b не пересекается с α Поэтому $b \parallel \alpha$, или $b \subset \alpha$ Ч.т.д.
Задача 1. Точка С лежит на отрезке АВ. Через точку А проведена плоскость, а через точки В и С параллельные прямые, пересекающие эту плоскость соответственно в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если точка С – середина отрезка АВ и $BB_1 = 7$ см. Дано: Точка А принадлежит плоскости α С – середина АВ $CC_1 \parallel BB_1$ BB1 = 7 см Найти: CC_1 Решение. 1. Докажем, что все точки лежат в одной плоскости. Прямая CC_1 параллельна BB_1, следовательно, через них можно провести плоскость β. Точки С, C_1, В, B_1 будут принадлежать плоскости β. Так как две точки С и В прямой АВ принадлежат плоскости β, то точка А этой прямой тоже будет принадлежать	Текст Задача 1. Точка С лежит на отрезке АВ. Через точку А проведена плоскость, а через точки В и С параллельные прямые, пересекающие эту плоскость соответственно в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если точка С – середина отрезка АВ и $BB_1 = 7$ см. Картинка  Текст Дано: $\grave{A} \in \alpha$ С – середина АВ

плоскости β. Теперь все точки принадлежат одной плоскости. 1. Рассмотрим ΔABB_1 С – середина АВ, $CC_1 \parallel BB_1 \Rightarrow CC_1$ средняя линия ΔАВВ1. $\tilde{N}\tilde{N}_1 = \frac{\hat{A}\hat{A}_1}{2} = \frac{7}{2}$ Ответ: 3,5 см	$CC_1 \parallel BB_1$ $BB_1 = 7$ см Найти: CC_1 Решение. 1.Докажем, что все точки лежат в одной плоскости. $CC_1 \parallel BB_1$ через них можно провести плоскость β. Точки С, C_1, В, B_1 будут лежать в плоскости β $\left.\begin{matrix} C \in \beta \\ B \in \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow CB \subset \beta, \quad A \in \beta$ Теперь все точки принадлежат одной плоскости. 2. Рассмотрим ΔABB_1 С – середина АВ, $CC_1 \parallel BB_1 \Rightarrow CC_1$ средняя линия ΔАВВ1. $\tilde{N}\tilde{N}_1 = \frac{\hat{A}\hat{A}_1}{2} = \frac{7}{2}$ =3,5см Ответ: 3,5 см
Задача 2. Средняя линия трапеции лежит в плоскости α, Пересекают ли прямые, содержащие ее основания, плоскость α? Ответ обоснуйте. Решение. Средняя линия трапеции параллельна основаниям. То есть KL параллельна BC и AD, и так как KL лежит в плоскости альфа, то по теореме о трех параллельных прямых Прямые, содержащие основания, параллельны плоскости α, поэтому они не пересекают плоскость α. Ответ: Нет.	Текст Задача 2. Средняя линия трапеции лежит в плоскости α, Пересекают ли прямые, содержащие ее основания, плоскость α? Ответ обоснуйте. Картинка  Текст Дано: ABCD – трапеция KL – ср. линия трапеции $KL \subset \alpha$ Найти: Пересекают ли прямые BC и AD плоскость α? Решение. Средняя линия трапеции параллельна основаниям.

	$\left.\begin{array}{l} BC \parallel KL \\ KL \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow BC \parallel \alpha$ $\left.\begin{array}{l} AD \parallel KL \\ KL \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow AD \parallel \alpha$ $\Rightarrow$ BC и AD не пересекают плоскость α Ответ: Нет

Параллельность плоскостей.

Определение. Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Обозначение: $\alpha || \beta$.

Иллюстрация параллельных плоскостей (Рис. 1.)

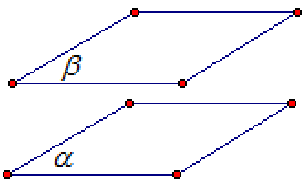


Рис. 1.

Аксиома А3

Существуют ли параллельные плоскости?

Вспомним аксиому А3.

Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей (Рис. 2.).

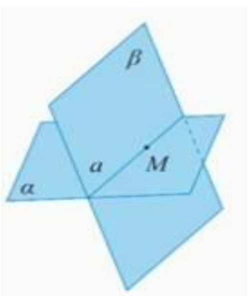


Рис. 2.

То есть, еще остается случай, если две плоскости не имеют общей точки. Такие плоскости называются параллельными.

Теорема (Признак параллельности двух плоскостей) и доказательство

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.

Доказательство

Проведем в плоскости α две пересекающиеся прямые *a* и *b* в точке *M,* а в плоскости β пересекающиеся прямые a_1 и b_1, причем прямая a_1 параллельна прямой *a*, а прямая b_1 параллельна прямой *b* (Рис. 3.). Докажем, что плоскости α и β параллельны.

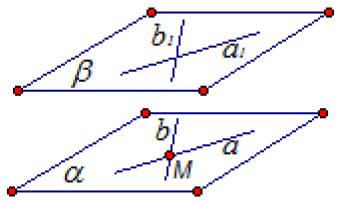


Рис. 3.

Прямая *a* принадлежит плоскости α, прямая a_1 принадлежит плоскости β, а прямая *a* параллельна прямой a_1. Значит, прямая *a* параллельна плоскости β, по признаку параллельности прямой и плоскости. Аналогично,
прямая *b* параллельна прямой b_1 из плоскости β. Значит,
прямая *b* параллельна плоскости β.

Предположим, что плоскости α и β не являются параллельными, то есть они пересекаются по некоторой прямой, назовем ее *c* (Рис. 4.).

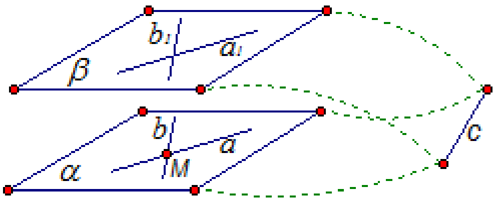


Рис. 4.

Плоскость α проходит через прямую *a,* параллельную плоскости β, и пересекает эту плоскость по прямой *c.* Согласно опорному факту,
прямая *a* параллельна прямой *c*. Аналогично, плоскость α проходит через прямую *b,* параллельную плоскости β, и пересекает эту плоскость по прямой *c.* Согласно опорному факту, прямая *b* параллельна прямой *c.* Получаем, что через одну точку *M* проходит две прямые, параллельные прямой *c,* что невозможно. Получили противоречие. Значит, предположение о том, что плоскости пересекаются, было неверным. Значит, плоскости не пересекаются, то есть параллельны, что и требовалось доказать.

Домашнее задание . Записать все определения в тетрадь и прислать мне.

Определения выучить
Файл с заданием отправьте преподавателю на почту mariaeva.vera@yandex.ru