27 октября. Математика.

Добрый день, уважаемые технологи. Мы начинаем изучать новый раздел геометрии, это стереометрия, Она изучает свойства фигур в пространстве. Все определения учим, не откладывая на потом. В конце лекции контрольные вопросы   и задания, на них надо ответить и прислать мне на проверку.

Задания теперь выполняйте и присылайте мне на электронную почту или в вайбер. Можно выполнить в тетради сфотографировать и послать. Желаю успехов!

Файл с заданием отправьте преподавателю на почту mariaeva.vera@yandex.ru

Первейшим гарантом непогрешимости математического мышления считается то, что исходным пунктом рассуждений и действий в этой науке служат аксиомы.

Иван Сеченов,
выдающийся физиолог, психолог
и мыслитель-материалист
1829-1905

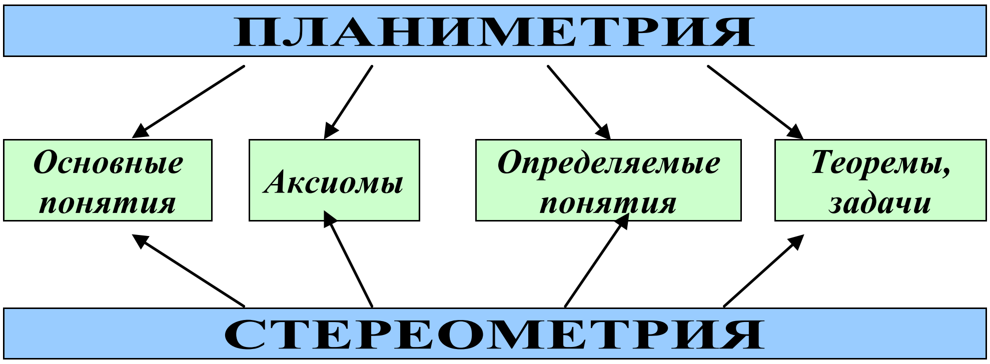
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ

План лекции

1 Структура курса геометрии
2 Определения и обозначения
3 Основные свойства плоскости
4 Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

1 Структура курса геометрии

Стереометрия — это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве. Она является второй составляющей геометрии и строится так же, как и планиметрия.

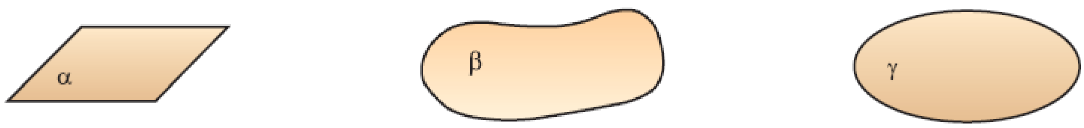


В стереометрии свойства геометрических фигур устанавливаются с помощью доказательства теорем (из греч. — рассматриваю), которые основываются на аксиомах (из греч. — считаю достойным, настаиваю, требую) — математических предложениях, принимаемых без доказательства

2 Определения и обозначения

Некоторые понятия геометрии являются ***основными***. Основные фигуры планиметрии — *точка и прямая* — автоматически становятся основными фигурами стереометрии. Как и в планиметрии, точки обозначают прописными буквами латинского алфавита — A, B, C, ..., прямые — строчными буквами латинского алфавита — a, b, c, ...

В пространстве рассматривается еще одна основная фигура — ***плоскость***. Ее можно представить как идеально гладкую поверхность доски, которая продлена во все стороны до бесконечности. Плоскости обозначают строчными буквами греческого алфавита α, β, γ, ... и изображают по-разному. На рисунке показаны примеры изображения плоскостей на листе бумаги.



Плоскость принято считать непрозрачной, поэтому части линий, которые «скрыты» под плоскостью изображают пунктиром.

Плоскость понимают также как множество точек.

Если A — точка плоскости α, то говорят, что ***точка A лежит в плоскости α, а плоскость α проходит через точку A***. Записывают: $A \in \alpha$. Запись $A \notin \alpha$ означает, что точка A не лежит в плоскости α.

Если каждая точка прямой a принадлежит плоскости α, то говорят, что ***прямая a лежит в плоскости α, а плоскость α проходит через прямую a.*** Записывают: $a \subset \alpha$. Запись $b \not\subset \alpha$ означает, что прямая b не лежит в плоскости α

Если прямая a и плоскость α имеют только одну общую точку A, говорят, что ***они пересекаются в точке A. Записывают:*** $a \cap \alpha = A$. На рисунке невидимую часть прямой (за плоскостью) изображают штриховой линией.

3 Основные свойства плоскости

Основные свойства точек, прямых и плоскостей, касающиеся их взаимного расположения, выражены в аксиомах.

Система аксиом стереометрии состоит из двух групп. Первая из них включает все аксиомы планиметрии. Они выполняются в каждой плоскости пространства. Эти аксиомы вам известны из курса планиметрии. Здесь рассмотрим группу аксиом, выражающую основные свойства плоскостей в пространстве.

1 Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну

2 Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

3 Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.

Благодаря первому свойству плоскость можно обозначать тремя ее точками. Если плоскость определена тремя точками, которые не лежат на одной прямой, например A, B, C, то в таком случае плоскость обозначают — (ABC). Читается: «плоскость ABC».

Утверждение, истинность которого доказана и которое используют для доказательства других утверждений, называют ***теоремой***. Простейшими теоремами являются ***следствия из аксиом стереометрии.***

Теорема 1 Через прямую и точку, не принадлежащую ей, можно провести плоскость и притом только одну

Доказательство. Данная точка и две точки прямой составляют три точки, не лежащие на одной прямой. По аксиоме 1 через них проходит единственная плоскость. По аксиоме 3 данная прямая лежит в этой плоскости.

Теорема 2 Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и притом только одну.

Доказательство. На каждой из прямых можно взять по одной необщей точке. Вместе с точкой пересечения прямых они образуют три точки, не лежащие на одной прямой. По аксиоме 1 через них проходит единственная плоскость. По аксиоме 3 обе прямые лежат в этой плоскости.

Теорема 3 Через две параллельные прямые можно провести плоскость и притом только одну.

Доказательство. По теореме 1 через одну из параллельных прямых и произвольную точку другой прямой можно провести плоскость, и притом только одну.

Если учесть вышеизложенное, то можно сделать вывод, что плоскость однозначно определяют:

1) три точки, не лежащие на одной прямой;

2) прямая и точка, не принадлежащая этой прямой;

3) две пересекающиеся прямые;

4) две параллельные прямые.

4 Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

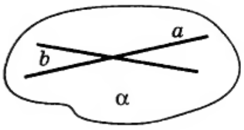
Взаимное расположение прямых в пространстве можно свести к следующим случаям.

1 Прямые ***пересекаются***, тогда они лежат в одной плоскости.

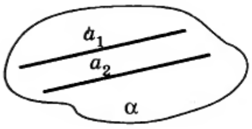
2 Прямые ***параллельны*** — тогда они лежат в одной плоскости

3 Прямые не пересекаются и не параллельны — такие прямые называются ***скрещивающимися***.

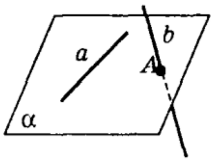
4 Прямые ***совпадают,*** если они имеют по крайней мере две общие точки



$a \times b$



$a\,\mathrm{P}b$



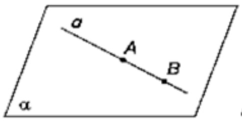
$a\,\mathrm{B}b$

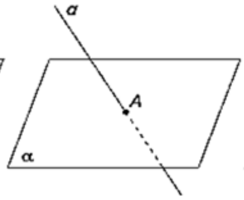
Возможны следующие варианты ***взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве***:

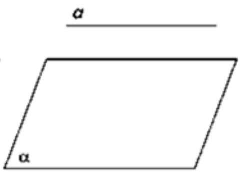
1) Прямая и плоскость имеют по крайней мере две общие точки. Тогда прямая ***лежит в плоскости***, то есть прямая и плоскость имеют множество общих точек;

2) Прямая и плоскость ***имеют одну общую точку***. Возможность такого размещения прямых и плоскостей обеспечивается тем, что вне плоскости являются точки пространства. Произвольная точка плоскости и точка вне плоскости определяют прямую, которая имеет с плоскостью одну общую точку, то есть ***пересекает*** ее.

3) Прямая и плоскость не имеют общих точек, то есть ***не пересекаются***. Прямая и плоскость, которые не имеют общих точек, называются ***параллельными***







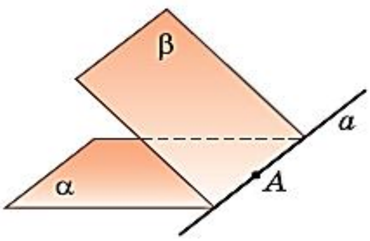
Для трех случаев взаимного размещения прямой и плоскости будем употреблять соответствующие обозначения: $a \subset \alpha$; $a \times \alpha$; $a\,\mathrm{P}\alpha$.

Плоскости в пространстве могут принимать следующие положения друг относительно друга:

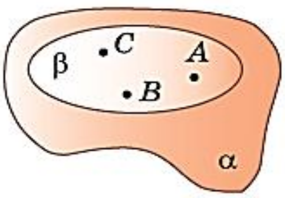
1 Две плоскости ***пересекаются по прямой*** — в этом случае они не имеют других общих точек вне этой прямой

2 Плоскости ***совпадают***

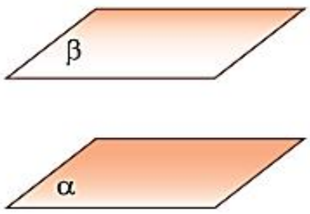
3 Если две разные плоскости не имеют общих точек, то они называются ***параллельными***.



$A \in \alpha,\, A \in \beta,\, \alpha\,\mathrm{I}\ \ \beta = a$



$\alpha = \beta$



$\alpha\,\mathrm{P}\beta$

Контрольные вопросы

1 Какой раздел геометрии называется стереометрией?

2 Какие предложения называются аксиомами? Теоремами?

3 Сформулируйте аксиомы плоскости и следствия из них.

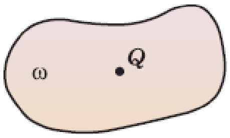
4 Назовите возможные варианты взаимного расположения прямых в пространстве.

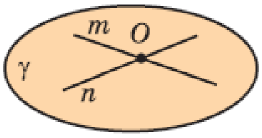
5 Перечислите возможные варианты взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве.

6 Приведите возможные варианты взаимного расположения плоскостей в пространстве.

Задачи, задания, вопросы

№1 Укажите количество точек, которые принадлежат плоскости ω.



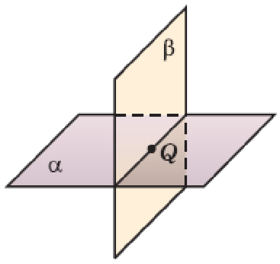


№2 На рисунке изображено две прямых m и n, пересекающиеся в точке O и определяющие плоскость γ. Укажите, какое количество прямых, проходящих через точку O, лежит на плоскости γ.

№3 Выберите для двух различных плоскостей α и β одинаковые по смыслу утверждения.

1) Плоскости α и β пересекаются;
2) плоскости α и β имеют лишь одну общую точку;
3) плоскости α и β имеют общую точку;
4) плоскости α и β имеют не больше двух общих точек;
5) плоскости α и β имеют общую прямую.

№4 Две различные плоскости имеют общую точку Q. Определите, сколько прямых, проходящих через точку Q, являются общими для плоскостей α и β.



№5 Плоскости пересекаются. Определите количество общих прямых, которые они могут иметь.

№6 Точки A, B, C лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

№7 Выберите четыре утверждения, которые определяют единственность плоскости.

1) Любые две точки пространства;
2) любая прямая пространства и точка на ней;
3) любая прямая пространства и точка вне нее;
4) любые три прямых пространства;
5) любые три точки пространства;
6) любые две параллельные прямые;
7) любые две прямые;
8) любые две пересекающиеся прямые.

Литература

[3] Математика: учебник для ссузов / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 7-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2010., стр. 320-323

[5] Геометрия. 10-11 классы: учебник для учащихся общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. — 18-е изд., — М.: Просвещение, 2009, стр. 3-8.