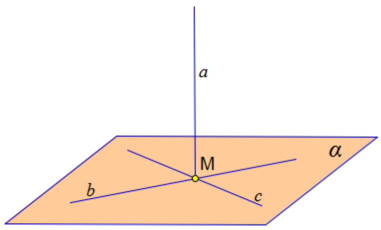
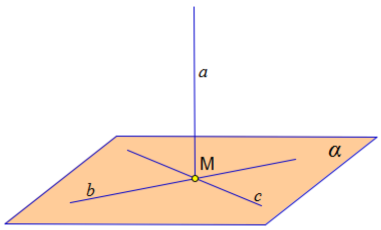
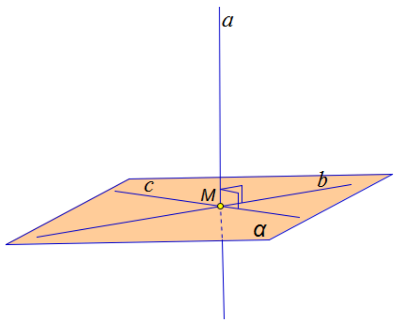
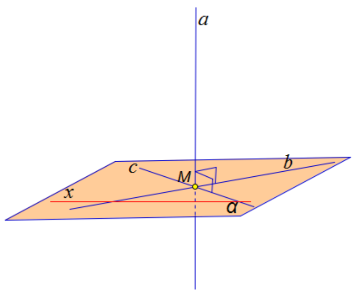
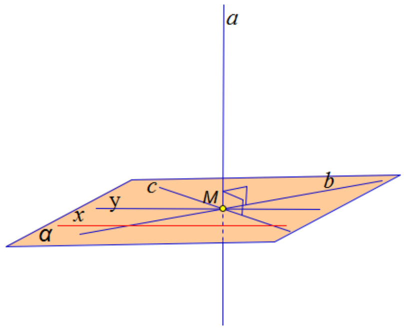
23 октября математика 1 курс юристы.

Лекция по теме «Признак перпендикулярности прямой и плоскости»

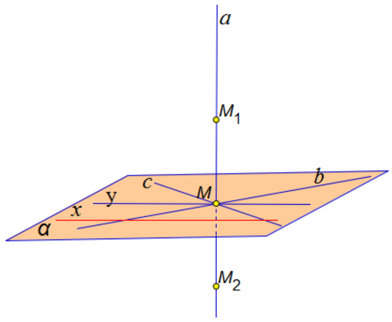
На разработку конструкции прибора инженер тратить достаточно много времени. Изменяя и модифицируя конструкцию прибора. Почему, например, бытовой вентилятор имеет именно такую форму? Конструкция должна быть, такой что бы вентилятор не падал и прочно стоял перпендикулярно полу при работе. Конструкцию этого бытового прибора можно перенести на чертёж. Пол мы заменим на плоскость α, штангу вентилятора изобразим в виде прямой а, ножки крепления в виде прямых b и с.	На экране изображение  <u>На экране появляется элементы чертежа, заменяющие части изображения</u> 
Предположим, что если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости. Докажем предположение. Рассмотрим нашу прямую *a*, которая будет перпендикулярна пересекающимся прямым b и с, лежащим в плоскости α. Обозначим точку пересечения прямых-точкой М. Докажем, что прямая *a* перпендикулярна плоскости *α*. Так как мы знаем, что прямая перпендикулярна плоскости, если перпендикулярна любой прямой лежащей в этой плоскости, то нам нужно доказать перпендикулярность прямой *a* произвольной прямой *x*.	На экране изображение и текст  Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости. <u>На экране чертёж и текст справа</u>  Дано: α, $b \in \alpha$, $c \in \alpha$, $b \cap c = M$, $a \perp b$, $a \perp c$. Доказать: $a \perp \alpha$ <u>На экране обновляется чертёж и добавляется текст в доказательство:</u>  Доказательство: 1) Проведём прямую x: $x \in \alpha$. <u>Обновляется чертёж и добавляется текст в доказательство</u>

<table>
<tr>
<td>Для доказательства построим дополнительно прямую y, параллельную прямой x и проходящую через точку М.</td>
<td>



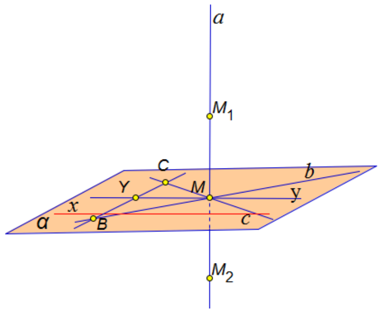
2) Проведём прямую y: y∥x,
y∈ α, y∈M.

<u>Обновляется чертёж и добавляется пункт доказательства:</u>



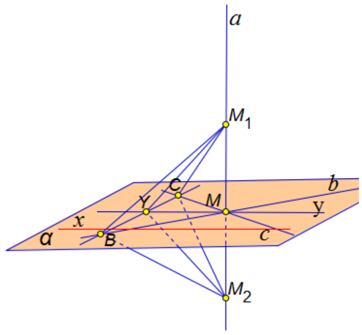
3) Отметим точки M_1 и M_2: $M_1M_2 \in a$,
$M_1M = MM_2$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Дополнительно на прямой a отметим точки M_1 и M_2 так, чтобы точка М была серединой отрезка M_1M_2.</td>
<td>

<u>Обновляется чертёж и добавляется пункт доказательства:</u>



3) Проведём прямую BC:
BC∈ α ,
BC∩ c = C, BC∩b=B,
BC∩y=Y
</td>
</tr>
<tr>
<td>Так же проведём прямую в плоскости α , пересекающую прямые b, c, y в точках B,C,Y соответственно.</td>
<td>

<u>На экране обновляется чертёж и добавляется</u>



4) $\begin{cases} b \perp M_1M_2 \\ M \in b \end{cases} \Rightarrow b - \tilde{n}\mathring{a}\eth\mathring{a}\ddot{a} - \hat{u}\acute{e}$

$\ddot{\imath}\mathring{a}\acute{\imath}\ddot{a}\grave{e}\hat{e}\acute{o}\ddot{e}\acute{y}\eth$

значит $M_1B = BM_2$

$\begin{cases} \tilde{n} \perp M_1M_2 \\ M \in \tilde{n} \end{cases} \Rightarrow \tilde{n} - \tilde{n}\mathring{a}\eth\mathring{a}\ddot{a} - \hat{u}\acute{e}$

$\ddot{\imath}\mathring{a}\acute{\imath}\ddot{a}\grave{e}\hat{e}\acute{o}\ddot{e}\acute{y}\eth$

значит $M_1C = CM_2$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Соединим полученные точки с концами отрезка M_1M_2. Так как прямые b и с перпендикулярны к прямой a и проходят через середину отрезка M_1M_2, то их можно назвать серединными перпендикулярами к отрезку M_1M_2. Тогда точки B и C равноудалены от концов отрезка, то есть отрезок M_1B равен отрезку BM_2, а отрезок M_1C равен отрезку CM_2.</td>
<td>

<u>Доказательство добавляется текстом</u>

5) Δ BM_1M= Δ BM_2M: $BM_1=BM_2$,$CM_1=CM_2$,BM–общая. Значит∠ M_1BY=∠ M_2BY.

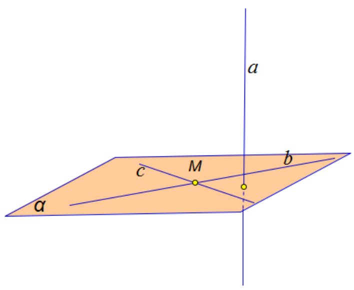
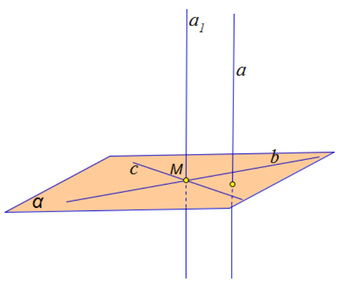
<u>Доказательство добавляется текстом</u>

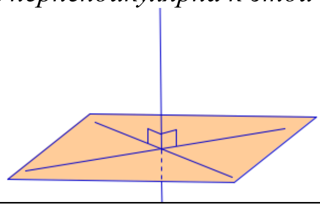
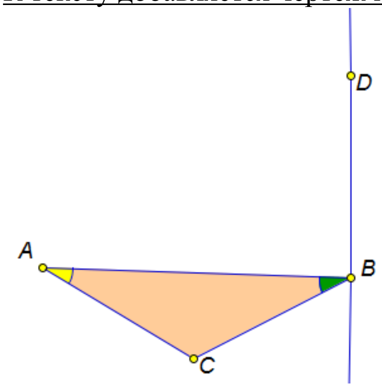
6) Δ M_1BY= Δ M_2BY: BY–общая, $BM_1=BM_2$, ∠ M_1BY=∠ M_2BY. Значит $M_1Y=YM_2$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Треугольник BM_1M равен треугольнику BM_2M по трём</td>
<td>

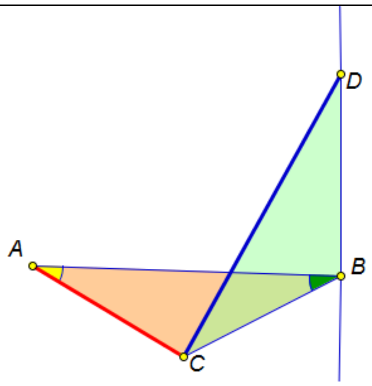
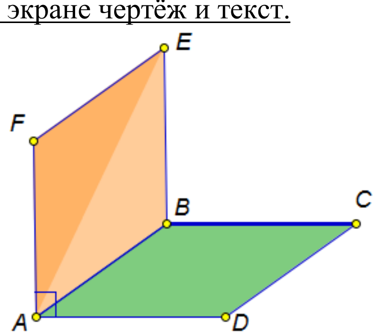
<u>Доказательство добавляется текстом</u>

7) так как $M_1Y=YM_2$, то Δ M_1YM_2–равнобедренный, а по свойству YM –высота.

8) Так как YM ⊥M_1M_2, то y⊥ α.
</td>
</tr>
</table>

сторонам. Из равенства треугольников следует, что угол M_1BY равен углу. Тогда треугольники M_1BY равен треугольнику M_2BY по двум сторонам и углу между ними. Из равенства этих треугольников следует равенство отрезков M_1Y и M_2Y. Это означает что треугольник M_1YM_2 равнобедренный с основанием M_1M_2 и отрезок YM его медиана, а по свойству медианы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию треугольника, отрезок YM является высотой, значит прямые *y* и *a*, содержащие эти отрезки, можно считать перпендикулярными. Прямая *y* перпендикулярна прямой *a*, и параллельна прямой *x*. По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой следует, что прямая *x* также перпендикулярна прямой *a*. Итак, прямая а перпендикулярна любой прямой x, значит перпендикулярна плоскости α.	<u>Доказательство добавляется текстом последовательно.</u> 9) $\begin{cases} y \perp a \\ y \parallel x \end{cases} \xrightarrow{\text{по лемме}} xa \xrightarrow{\text{по определению}} a \perp \alpha.$
Но в этой теореме возможен ещё один случай расположения прямой *a*, который не демонстрирует наша конфигурация чертежа. Когда прямая *a* не проходит через точку пересечения прямых *b* и *c*. Докажем и этот вариант. В этом случае проведём прямую a_1, параллельную прямой *a* и проходящую через точку M.	<u>На экране чертёж</u>  <u>На экране обновляется чертёж и добавляется пункт доказательства</u>  Доказательство: 1) Проведём a_1: $a_1 \parallel a$, $a_1 \ni$ M. <u>На экране под чертежом появляется текст:</u> На экране к лемме добавляется текст теоремы.

Важно вспомнить теорему изученную на предыдущем уроке: если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости. Так как прямая *a* перпендикулярна прямым *b* и *c* и параллельна прямой a_1, то по лемме прямая a_1 тоже будет перпендикулярна прямым *b* и *c*. В этом расположении прямых мы уже доказали перпендикулярность прямой к плоскости. Но тогда если прямая a_1 перпендикулярна плоскости и параллельна прямой *a*, то по теореме 1 прямая *a* перпендикулярна плоскости α.	Теорема 1: если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости. К доказательству добавляется текст: 2) $\begin{cases} a \perp b \\ a \perp c \\ a \parallel a_1 \end{cases} \xRightarrow{\text{по лемме}} a_1 \perp b, a_1 \perp c \xRightarrow{\text{по 1 вар.}} a_1 \perp \alpha$ К доказательству добавляется текст: 3) $\begin{cases} a_1 \perp \alpha \\ a_1 \parallel a \end{cases} \xRightarrow{\text{по теореме 1}} a \perp \alpha.$
Эта теорема даёт возможность доказать перпендикулярность прямой плоскости с указанием перпендикулярности только двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости, а не любой прямой. В геометрии данное утверждение называется признаком перпендикулярности прямой и плоскости.	<u>На экране текст признака и чертёж:</u> Признак перпендикулярности прямой и плоскости: *если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости*. 
Рассмотрим применение признака перпендикулярности прямой и плоскости. Дан треугольник ABC с суммой углов A и B в 90 градусов. Прямая BD проведена перпендикулярно к плоскости треугольника ABC.	<u>На экране текст задачи 1.</u> В треугольнике ABC сумма углов A и B равна 90°. Прямая BD перпендикулярна к плоскости ABC. Докажите, что CD⊥ AC. <u>К тексту добавляется чертёж и решение</u> Решение:  На экране обновляется чертёж.

Прямая CD лежит в плоскости треугольника BCD. Треугольник ABC прямоугольный, так как угол ACB равен разности 180 градусов и суммы углов A и B. Значит прямая AC перпендикулярна прямой BC. По условию прямая BD перпендикулярна плоскости ABC, значит она перпендикулярна прямой AC. Тогда прямая AC перпендикулярна двум пересекающимся прямым BC и BD лежащим в плоскости треугольника BCD, значит AC перпендикулярна к плоскости BCD и перпендикулярна прямой CD лежащей в этой плоскости.	Решение:  В поле решение добавляется текст 1) Δ ABC –прямоугольный, т.к. $\angle$ACB=180°–($\angle$A+$\angle$B)=90°$\Rightarrow$AC$\perp$BC В поле решение добавляется текст и обозначение прямого угла 2)AC$\perp$BD (по условию) В поле решение добавляется текст и обозначение прямого угла ACD 3)$\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp BC \\ BD \cap BC = B \\ BD, BC \in (BCD) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BCD)$ 4)$\begin{cases} AC \perp (BCD) \\ CD \in (BCD) \end{cases} \Rightarrow AC \perp CD.$
Рассмотри ещё пример решения задачи. Даны два квадрата ABCD и ABEF.Они расположены так, что бы сторона AD была перпендикулярна стороне AF. Так как ABEF- квадрат, то прямая AB перпендикулярна стороне AF. Тогда по признаку перпендикулярности прямой и	<u>На экране текст задачи 2.</u> Задача 2. Квадраты ABCD и ABEF расположены так, что AD$\perp$AF. Докажите, что прямая BC перпендикулярна к плоскости AEF. <u>На экране чертёж и текст.</u> <u>Доказательство:</u>  <u>К чертежу добавляется пункт решения.</u> 1) ABEF -квадрат$\Rightarrow$AB$\perp$AF К чертежу добавляется пункт решения 2) 2) $\begin{cases} AF \perp AB \\ AF \perp AD \text{ (по условию)} \\ AB,\ AD \in (ABCD) \\ AB \cap AD = A \end{cases} \xrightarrow{\text{по признаку}} AF \perp (ABCD)$

плоскости AF плоскости квадрата ABCD и прямой BC лежащей в этой плоскости. По определению квадрата ABCD сторона BC перпендикулярна прямой AB, но прямая AB параллельна прямой FE плоскости ABEF, следовательно по лемме о параллельных прямых перпендикулярных к третьей прямой, прямая FE перпендикулярна прямой BC. Таким образом, прямая BC перпендикулярна пересекающимся прямым AF и FE лежащим в плоскости AEF, что следовательно по признаку перпендикулярности прямой к плоскости, значит прямая BC перпендикулярна к плоскости AEF.	К чертежу добавляется пункт решения 3) 3) $\begin{cases} BC \perp AB \\ AB \parallel FE \end{cases} \xRightarrow{\text{по лемме}} FE \perp BC$ К чертежу добавляется пункт решения 4) 4) $\begin{cases} BC \perp AF \\ BC \perp FE \\ AF,\ FE \in (AEF) \\ AF \cap FE = F \end{cases} \xRightarrow{\text{по признаку}} BC \perp (AEF)$
В дальнейшем с помощью данного признака будут доказаны несколько главных теорем о перпендикулярности прямых и плоскостей в просрансстве.	

Подготовить ответы на следующие вопросы:

1. Верно ли что: если 2 прямые в пространстве перпендикулярны к третьей прямой, то это утверждение при условии, что все три прямые параллельны? Верно ли это утверждение при условии, что все три прямые лежат в одной плоскости?
2. Прямая a || , a b

. Существует ли прямая перпендикулярная к прямым a и b?

Файл с заданием отправьте преподавателю на почту mariaeva.vera@yandex.ru