23 окт. математика 1 курс ЖКХ
Тема «Показательные неравенства»

На предыдущих уроках мы с вами изучали показательную функцию, показательные уравнения и их системы. Методы решения показательных уравнений и их систем.
Хочу вам напомнить самое простое показательное уравнение, с которого мы и начали изучение показательного уравнения.
И так давайте напишем это уравнение и решим его:
$3^x = 9$
Теперь, то мы знаем что это метод сведения к одному основанию. Приведем обе части к основанию 3.
$3^x = 3^2$
Мы привели обе части уравнения к одному основанию, а теперь приравниваем показатели степени и получим, что $x = 2$. Уравнение решено.
Скажите пожалуйста, если теперь вместо знака «равенство» мы поставим знак «>», либо знак «<»? Что мы получим?
неравенство
А какое неравенство?
Показательное неравенство.
.
Вот мы с вами и пришли к теме сегодняшнего занятия «Показательные неравенства. Приемы их решения»

Сегодня нашей **основной целью** будет Знакомство с показательными неравенствами и основными приемами решения показательных неравенств.

Давайте попробуем дать определение показательного неравенства.

Определение: Показательное неравенство – это неравенство в котором неизвестное находится в показателе степени .

Простейшее показательное неравенство имеет вид $a^x < m$, или $a^x > m$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, x - неизвестное. /слайд № 7/

На этом этапе я бы хотела вам продемонстрировать таблицу. Посмотрите все на экран. /слайд 8/ Приложение 2

Простейшие показательные неравенства

	$a^x < m$	$a^x > m$	$a^{f(x)} < m$	$a^{f(x)} > m$
$m \leqslant 0$; $a > 0$, $a \neq 1$	нет решений	$x \in R$	нет решений	$x \in D(f)$
$m > 0$; $a > 1$	$x < \log_a m$	$x > \log_a m$	$f(x) < \log_a m$	$f(x) > \log_a m$
$m > 0$; $0 < a < 1$	$x > \log_a m$	$x < \log_a m$	$f(x) > \log_a m$	$f(x) < \log_a m$
$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	при $a > 1$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$ при $0 < a < 1$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$			

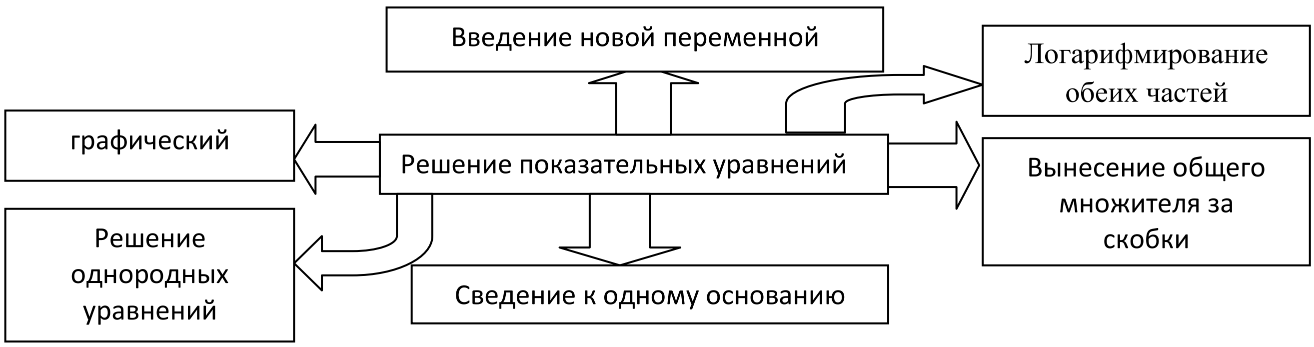
Рассмотрим несколько простых примера. Они лежат у вас на столах Приложение 3. На доске я их не стала показывать, т.к. хочу делать сравнение с нашей таблицей.

1) $2^x < -3$
2) $2^x < 3$
3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 3$
4) $2^x > -3$
5) $2^x > 3$
6) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 3$

Решение всех этих простейших показательных неравенств хорошо видно на графиках. Давайте нарисуем график показательной функции при $a > 1$ и при $0 < a < 1$.

Рисуют графики и на них показывают решение. А вот когда в показателе степени стоит не просто x, а f(x), то все решается аналогично. Но если решать по этой таблице, то нам нужно ее запоминать, что не совсем удобно, поэтому мы выведем формулы, которые можно легко запомнить и применить их при решении показательных неравенств.

Давайте вспомним методы решения показательных уравнений. Преподаватель чертит на доске схему, а обучающиеся помогают.



При решении показательных неравенств мы с вами будем сравнивать методы решения показательных неравенств с методами решения показательных уравнений.

I. Самым первым и важным методом при решении показательных уравнений был метод «сведение в одному основанию», который в принципе применялся в конце каждого из последующих методов. Может он применяется и при решении показательных неравенств? Для подтверждения или же опровержения нашего предположения рассмотрим первый пример.

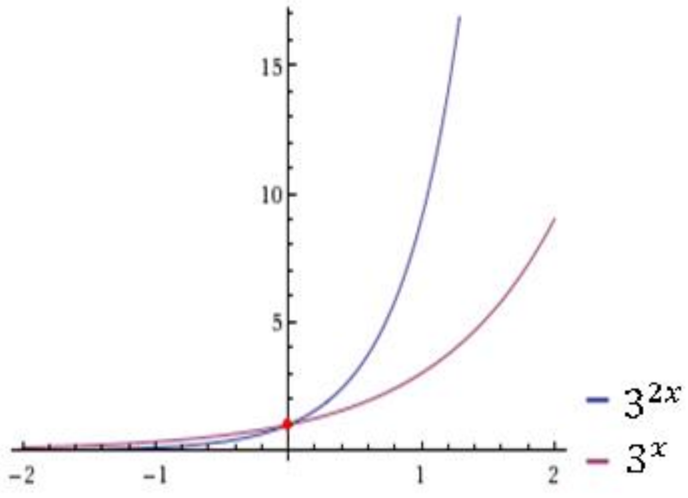
$9^x > 3^x$

Приведем к одному основанию 3. Получим

$3^{2x} > 3^x$

Если бы мы решали показательное уравнение, то мы бы приравняли показатели степени, а в показательном неравенстве мы сравниваем показатели степени. Но прежде чем начать такое сравнение, нам необходимо обратиться к свойству показательной функции.

Когда $a > 1$ график показательной функции возрастает. Давайте попробуем построить график двух показательных функции $y = 3^{2x}$ и $y = 3^{x}$. Графики появляются на доске /слайд №9/



После приведения нашего неравенства к одному основанию, будем сравнивать степени и у нас получается, что

$2x > x$

$x > 0$

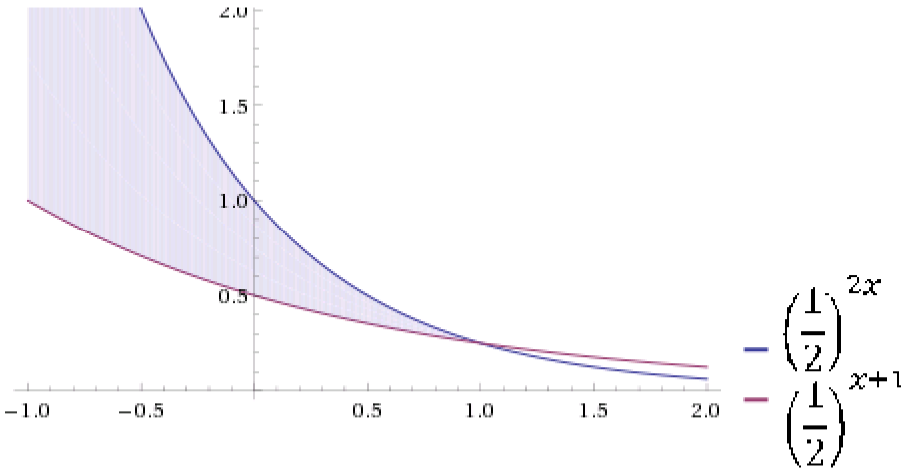
Тоже самое решение мы видим и на графическом изображении. Следовательно ответ мы получили верный.

Ответ: $x > 0$

Мы рассмотрели случай когда $a > 1$. А теперь давайте рассмотрим случай когда $0 < a < 1$. /слайд №10/

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$

Основания у нас одинаковые. Теперь мы можем сравнивать показатели степени. Если бы мы решили это неравенство также как первое, то получили бы следующее неравенство: $2x > x + 1$. Но я вам сразу хочу сказать, что очень многое зависит от основания. В нашем случае основание $0 < a < 1$, т.е. график показательной функции убывает. При сравнение показателей степеней с основанием $0 < a < 1$, знак меняется на противоположный, т.е. мы получаем не $2x > x + 1$, а $2x < x + 1$. Решаем это неравенство и получаем $x < 1$. Это и будет нашим ответом. А теперь давайте посмотрим и подтвердим наш ответ построение графиков функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$. Графики появляются на доске /слайд № 10/



На этом рисунке мы на самом деле видим, что график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$ располагается выше графика функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ при $x < 1$. Следовательно наше неравенство мы решили верно.

Ответ: $x < 1$.

Вывод: Если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла: $f(x) > g(x)$. Если $0 < a < 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$. /слайд № 11/

Мы выявили самый распространенный метод решения показательных неравенств – **приведение к одному основанию.**

Следовательно метод введения новой переменной применим также и при решении показательных неравенств.

Рассматриваем следующее неравенство

$4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 4^2 \geq 0$

$2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 \geq 0$

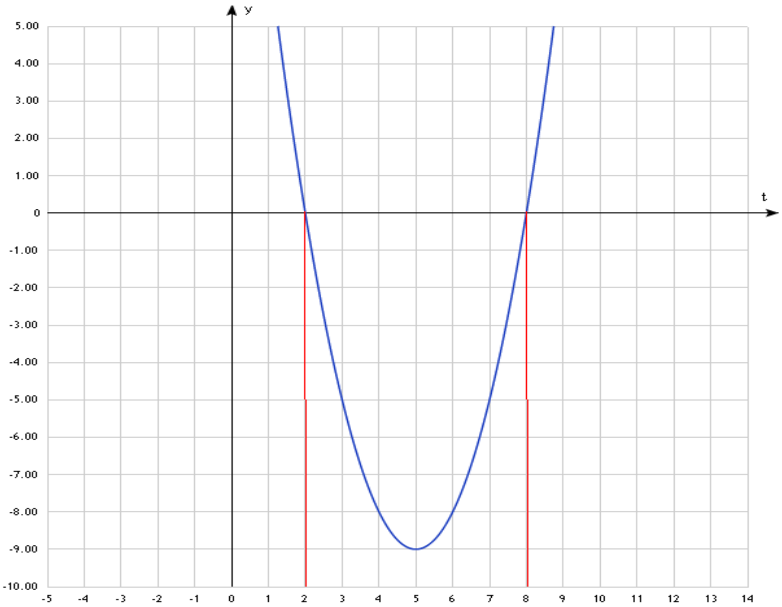
Сделаем замену $2^x = t$, где $t > 0$

$t^2 - 10t + 16 \geq 0$

$D = 100 - 64 = 36$

$$t_1 = \frac{10+6}{2} = 8$$

$$t_2 = \frac{10-6}{2} = 2$$



Из этого графика видно, что $t \leq 2$ или $t \geq 8$

Возвращаемся к нашей замене и получаем

$2^x \leq 2$ или $2^x \geq 8$

$2^x \leq 2^1$ или $2^x \geq 2^3$

Основание 2>1, следовательно получаем

$x \leq 1$ или $x \geq 3$

Ответ: $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$

Вывод: мы получили еще один метод решения показательных неравенств – это **введение новой переменной.**

Записать определения и способы решений.