22декабря математика 1курс юристы.

Знать формулы. Решить № 537,538

Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов.

Рассмотрим формулы, по которым ***сумму синусов*** и ***сумму косинусов***, ***разность синусо***в и ***разность косинусо***в можно ***преобразовать в произведение.***

Задача 1. Упростить выражение $\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}.$

Решение. Используя формулу сложения и формулу синуса двойного угла, получаем

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12} = \left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\right.$$

$$\left.+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{12} = \quad = 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \sin\alpha\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Эту задачу можно решить проще, если использовать формулу суммы синусов:

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (1)$$

Сумма синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности.

С помощью этой формулы получаем $\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12} =$

$$= 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Докажем теперь справедливость формулы (**1**). Обозначим $\frac{\alpha+\beta}{2}=x, \quad \frac{\alpha-\beta}{2}=y.$

Тогда $x + y = \alpha, x - y = \beta,$ и поэтому $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x + y) + \sin(x - y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y +$ $+ \sin x\cos y - \cos x\sin y = 2\sin x\cos y = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4)$$

Наряду с формулой (**1**) используется ***формула разности синусов***, а также ***формулы суммы и разности косинусов.***

Формулы (**3**) и (**4**) доказываются так же, как и формула (**1**); формула (**2**) получается из формулы (**1**) заменой β на $-\beta$.

Задача 2. Вычислить $\sin 75^0 + \cos 75^0$. **Решение.** $\sin 75^0 + \cos 75^0 = \sin 75^0 + \sin 15^0 =$

$$= 2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2} = 2\sin 45°\cos 30° = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Задача 3. Преобразовать в произведение $2\sin\alpha + \sqrt{3}$. **Решение.**

$$2\sin\alpha+\sqrt{3} = 2\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$

Упражнения

537 Упростить выражение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$;

3) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 4) $\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

538 Вычислить:

1) $\cos 105° + \cos 75°$; 2) $\sin 105° - \sin 75°$;

3) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}$; 4) $\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}$;

5) $\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}$; 6) $\sin 105° + \sin 165°$.

539 Преобразовать в произведение:

1) $1 + 2\sin\alpha$; 2) $1 - 2\sin\alpha$; 3) $1 + 2\cos\alpha$; 4) $1 + \sin\alpha$.

540 Доказать тождество:

1) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg} 2\alpha$; 2) $\frac{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

541 Упростить выражение:

1) $\frac{2(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}$; 2) $\frac{1+\sin\alpha-\cos 2\alpha-\sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}$

542 Доказать тождество:

1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha-\sin 2\alpha=\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos\alpha+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=0$;

3) $\frac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha+1-2\sin^2 2\alpha}=2\sin\alpha$.

543 Записать в виде произведения:

1) $\cos 22° + \cos 24° + \cos 26° + \cos 28°$;

2) $\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{6}$.