22 октября. Математика 1 курс технологи

Добрый день , уважаемые студенты.

Файл с заданием отправьте преподавателю на почту mariaeva.vera@yandex.ru

Нужно ответить на все вопросы и задания, которые встретите в лекции и прислать мне.

Название предмета **Алгебра и начала математического анализа.**

Тема урока: **Логарифмические неравенства**

Актуализация знаний.

Ответить на вопросы и прислать мне

1. Что называется логарифмом.
2. Перечислите свойства логарифмом.

3. Представить в виде логарифма с основанием 2 число.

а) 16; б) 64; в) $\frac{1}{16}$;

4. Вычислите.

а) $\log_3 \frac{1}{5} + \log_3 45$;

б) $25^{\log_5 3}$;

в) $\frac{\log_2 1}{\log_{11} 77}$;

5. Вспомним основные свойства логарифмической функции.

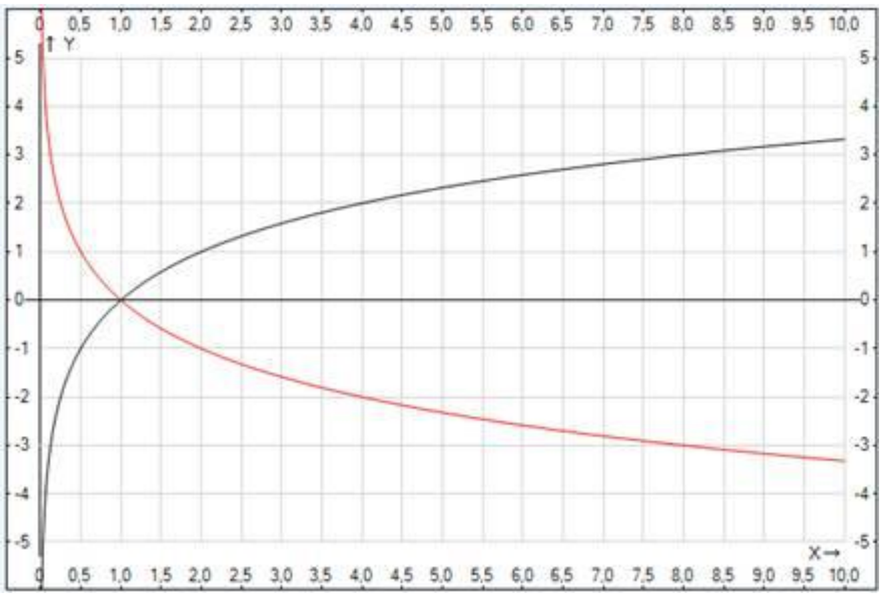


Рис. 1. График логарифмической функции при различных основаниях

1. Область определения: $D(y) = (0;+\infty), t > 0$;

2. Область значений: $E(y) = (-\infty;\ +\infty), y \in R$;

3. Функция монотонна на всей своей области определения. При $a > 1$ монотонно возрастает (когда аргумент возрастает от нуля до плюс бесконечности, функция возрастает от минус до плюс бесконечности, $\log_a t_2 > \log_a t_1 \leftrightarrow t_2 > t_1$). При $0 < a < 1$ монотонно убывает (когда аргумент возрастает от нуля до плюс бесконечности, функция убывает от плюс до минус бесконечности, $\log_a t_2 > \log_a t_1 \leftrightarrow t_2 < t_1$).

III. Объяснение нового материала

Определение:

Неравенства, которые содержат переменную под знаком логарифма или в его основании, называются логарифмическими.

Решение ***логарифмических неравенств*** основывается на свойстве монотонности логарифмической функции.

1. Неравенство $\log_a f(x) < b$ в случае, если $0 < a < 1$ сводится к равносильному неравенству $f(x) > a^b$. Если же $a > 1$- то к неравенству $f(x) < a^b$.

Аналогично неравенство $\log_a f(x) > b$ равносильно неравенствам для $0 < a < 1$: $f(x) < a^b$; для $a > 1$: $f(x) > a^b$.

Пример 1:

Задание. Решить неравенство $\log_{0,5}(x-1) > -1$

Решение. ОДЗ: $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in (1; +\infty)$

Учитывая выше написанное, получаем, что заданное логарифмическое неравенство равносильно неравенству:

$$x - 1 < 0,5^{-1} \text{ или } x - 1 < 2 \Rightarrow x < 3$$

В пересечении с ОДЗ получаем, что $x \in (1; 3)$

Ответ: $x \in (1; 3)$

2. Рассмотрим решение логарифмического неравенства, когда основание логарифма $a > 1$.

$$\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x) \\ a > 1 \end{cases}$$

Неравенство необходимо решать, применяя эквивалентные, равносильные преобразования. Рассмотрим схему. Поскольку мы рассматриваем логарифмическую функцию с основанием, большим единицы, помним, что функция монотонно возрастает. Отсюда:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \leftrightarrow f(x) > g(x)$$

При этом необходимо не забыть про ОДЗ, т. к. под логарифмом могут стоять строго положительные выражения. ОДЗ представлено системой:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Решением исходного неравенства является эквивалентное неравенство $f(x) > g(x)$, поэтому для соблюдения ОДЗ достаточно защитить меньшее из чисел. Получаем систему неравенств, которая соответствует исходному неравенству:

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Например:

$$\log_2(2x + 2) > \log_2 x \leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 > x \\ x > 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > 0 \end{cases}$$

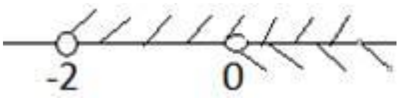


Рис. 2. Иллюстрация решения примера

Ответ: $x > 0$

3. Рассмотрим решение логарифмического неравенства, когда основание логарифма $0 < a < 1$.

$$\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

Поскольку мы рассматриваем логарифмическую функцию с основанием, лежащим в пределах от нуля до единицы, помним, что функция монотонно убывает. Отсюда:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \leftrightarrow f(x) < g(x)$$

При этом необходимо не забыть про ОДЗ, т. к. под логарифмом могут стоять строго положительные выражения. ОДЗ представлено системой:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Решением исходного неравенства является эквивалентное неравенство $f(x) < g(x)$, поэтому для соблюдения ОДЗ достаточно защитить меньшее из чисел. Получаем систему неравенств, которая соответствует исходному неравенству:

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Например:

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+2) > \log_{\frac{1}{2}} x \leftrightarrow \begin{cases} 2x+2 < x \\ 2x+2 > 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > -1 \end{cases}$$

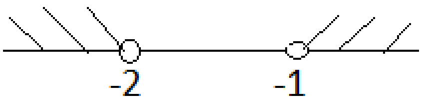


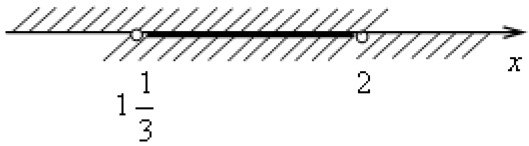
Рис. 3. Иллюстрация решения примера

Ответ: нет решений

IV. Закрепление.

а) $\log_5 x > \log_5 (3x - 4) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3x - 4, \\ 3x - 4 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -2x > -4, \\ 3x > 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2, \\ x > 1\frac{1}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \quad 1\frac{1}{3} < x < 2.$$



б) $\log_{0,6} (2x - 1) < \log_{0,6} x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 > x, \\ x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x > 1.$

О т в е т : а) $1\frac{1}{3} < x < 2$; б) $x > 1$.

При решении этого упражнения особое внимание обращаем на транзитивность двух неравенств из ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 3x - 4 & (1), \\ x > 0, \\ 3x - 4 > 0 & (2). \end{cases}$$

Имеем: $x > 3x - 4$; $3x - 4 > 0 \Rightarrow x > 0$.

Получаем, неравенство $x > 0$ лишнее в этой системе, достаточно (1) и (2):

$$\begin{cases} x > 3x - 4, \\ 3x - 4 > 0. \end{cases}$$

3. № 45.6, № 45.7 (а; б).

Эти упражнения представляют собой логарифмические неравенства, сводящиеся к решению квадратных неравенств.

Вспоминаем *алгоритм* решения квадратного неравенства:

1 шаг. Решаем соответственное квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

2 шаг. Изображаем схематично расположение параболы относительно оси Ox в зависимости от знака коэффициента a и полученных решений уравнения.

3 шаг. Определяем графически абсциссы точек, удовлетворяющих неравенству, и записываем ответ.

Решение:

а) $\log_3 (x^2 + 6) < \log_3 5x \iff \begin{cases} x^2 + 6 < 5x, \\ x^2 + 6 > 0. \end{cases}$

Второе неравенство системы верно для любого x.

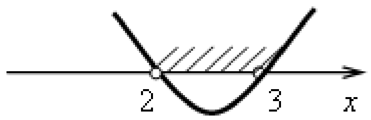
Решаем отдельно первое неравенство.

$x^2 + 6x < 5x$;

$x^2 - 5x + 6 < 0$;

$x^2 - 5x + 6 = 0$;

$x_1 = 2$; $x_2 = 3$.



Значит, решением являются $2 < x < 3$.

в) $\lg (x^2 - 8) \le \lg (2 - 9x) \iff \begin{cases} x^2 - 8 \le 2 - 9x, & \text{(I)} \\ x^2 - 8 > 0. & \text{(II)} \end{cases}$

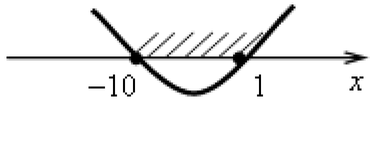
I) $x^2 - 8 \le 2 - 9x$;

$x^2 - 8 - 2 + 9x \le 0$;

$x^2 + 9x - 10 \le 0$;

$x^2 + 9x - 10 = 0$;

$x_1 = -10$; $x_2 = 1$.



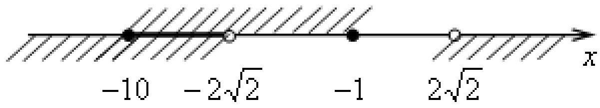
II) $x^2 - 8 > 0$;

$x^2 - 8 = 0$;

$x^2 = 8$;

$x = \pm 2\sqrt{2}$.

Решением системы неравенств является пересечение полученных промежутков.



Значит, $-10 \le x < -2\sqrt{2}$.

О т в е т : а) $2 < x < 3$; в) $-10 \le x < -2\sqrt{2}$.

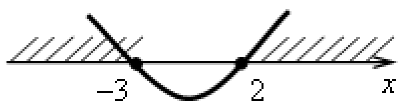
$$\log_{\frac{1}{2}}(6-x) \ge \log_{\frac{1}{2}} x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x \le x^2, \\ 6 - x > 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 + x - 6 \ge 0, \\ x < 6. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы.

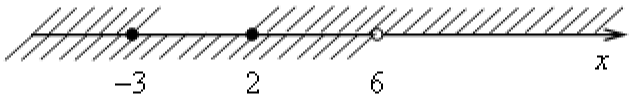
$x^2 + x - 6 \ge 0$;

$x^2 + x - 6 = 0$;

$x_1 = -3$; $x_2 = 2$.



Решением системы неравенств является пересечение следующих промежутков:



Значит, $x \le -3$ или $2 \le x < 6$.

О т в е т : а) $x \le -3$; $2 \le x < 6$.

VI. Итоги урока.

В о п р о с ы у ч а щ и м с я :

– Неравенства какого вида называются логарифмическими?

–Каким образом осуществляется переход от логарифмического неравенства к алгебраическому?

– Какими условиями определяется ОДЗ логарифмического неравенства? Как используется транзитивность неравенств для упрощения получаемой системы неравенств?

Домашнее задание :Ответить на все вопросы.