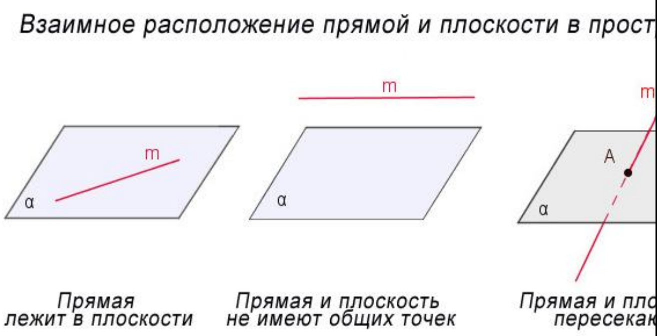
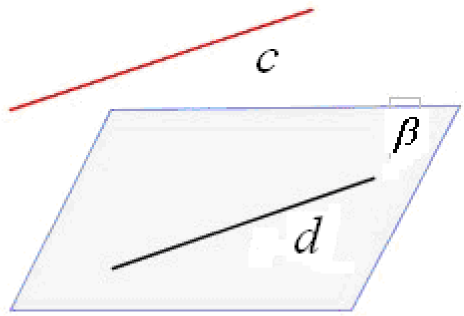
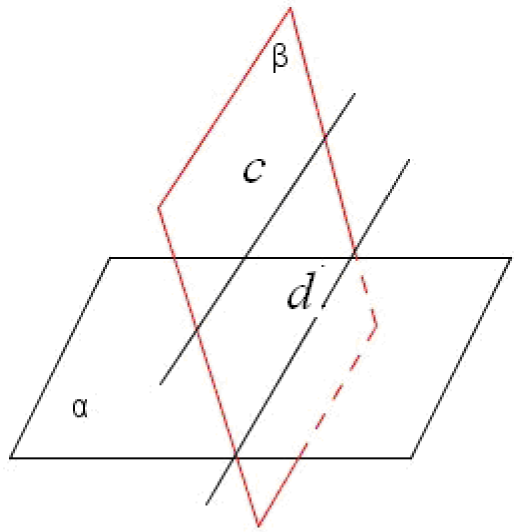
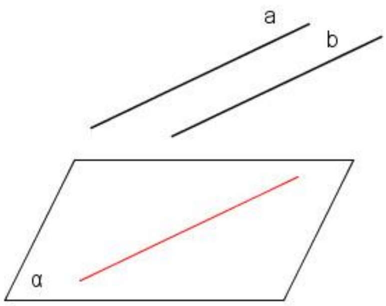
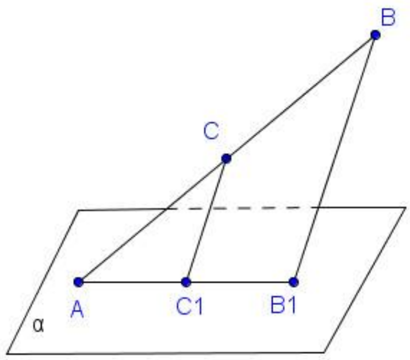
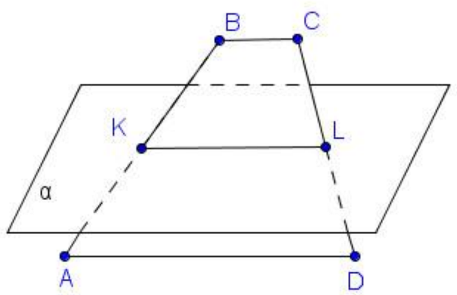
Лекция по теме «Параллельность прямой и плоскости»

В этом уроке мы рассмотрим возможные случаи взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве, введем понятие параллельности прямой и плоскости, докажем признак параллельности прямой и плоскости.	
Возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве: 1. Прямая лежит на плоскости; 2. Прямая пересекает плоскость, т. е. прямая и плоскость имеют одну общую точку; 3. Прямая и плоскость не имеют общих точек.	Картинка 
Определение. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек Параллельность прямой А и плоскости α обозначается так: $a \parallel \alpha$	Текст Определение. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек Параллельность прямой А и плоскости α обозначается так: $a \parallel \alpha$
Теорема (признак параллельности прямой и плоскости) Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости. Дано: Плоскость β Прямая с не лежит в плоскости β Прямая d лежит в этой плоскости β параллельна d Доказать: Прямая а параллельна плоскости β Доказательство. Доказательство будем вести от противного. Предположим: прямая с не параллельна плоскости β. Тогда она пересекает плоскость β в некоторой точке F. По лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми, прямая d также пересекает эту плоскость. Пришли к противоречию, по условию d	Текст Теорема (признак параллельности прямой и плоскости) Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости. Картинка  Текст Дано: $C \not\subset \beta,\ d \subset \beta,\ c \parallel b,$ то $c \parallel \beta$ Доказать: $c \parallel \beta$ Доказательство.

лежит в плоскости β. Предположение не верно, прямая с параллельна плоскости β. Что и требовалось доказать.	Предположим: $c \nparallel \beta$ Тогда: $c \cap \beta = F$. Так как $c \parallel d$, то d $\cap$ $d = F1F_1$ (по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми) Противоречие. По условию $d \subset \beta$. Предположение неверно, $c \parallel \beta$
Докажем еще два утверждения, которые часто используются при решении задач. 1. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то лини пересечения плоскостей параллельна данной прямой. Если $c \subset \beta$, $c \parallel \alpha$, $\beta \cap \alpha = d$, то Доказательство. По определению, прямые называются параллельными, если: 1) прямые лежат в одной плоскости; 2) прямые не пересекаются. Так как по условию плоскость βпроходит через прямую с, а прямая d является общей для плоскостей α и β (их линией пересечения), то с и d лежат в одной плоскости (плоскости β). Так как прямая *c* параллельна плоскости α, в которой лежит прямая d, то с и d не пересекаются. Оба условия параллельности выполняются. Можно сделать заключение: $d \parallel c$. Что и требовалось доказать	Текст Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линии пересечения плоскостей параллельна данной прямой. Картинка  Текст Дано: $c \subset \beta$ $c \parallel \alpha$ $\beta \cap \alpha = d$ Доказать: $d \parallel c$ Доказательство. Так как $\left.\begin{matrix} c \subset \beta \\ d = \beta \cap \alpha \end{matrix}\right\}$ то а и b лежат в одной плоскости Если $\left.\begin{matrix} c \parallel \alpha \\ d \subset \alpha \end{matrix}\right\}$ то c и d не пересекаются. Оба условия параллельности выполняются. Делаем заключение: $d \parallel c$. ч.т.д.
2. Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.	Текст Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.

Дано: $a \parallel b$ $a \parallel \alpha$ Доказать: $b \parallel a$, или $b \subset a$ Доказательство. Так как $a \parallel \alpha$, то прямая а не пересекается с плоскостью α. Если а не пересекает плоскость, то и параллельная ей прямая b ее не пересекает(по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми). Поэтому прямая b либо параллельна плоскости, либо лежит в ней. Что и требовалось доказать.	Картинка  Текст Дано: $a \parallel b$ $a \parallel \alpha$ Доказать: $b \parallel a$, или $b \subset a$ Доказательство $a \parallel \alpha \Rightarrow$ а не пересекается с α $a \parallel b \Rightarrow$ b не пересекается с α Поэтому $b \parallel a$, или $b \subset a$ Ч.т.д.
Задача 1. Точка С лежит на отрезке АВ. Через точку А проведена плоскость, а через точки В и С параллельные прямые, пересекающие эту плоскость соответственно в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если точка С – середина отрезка АВ и $BB_1 = 7$ см. Дано: Точка А принадлежит плоскости α С – середина АВ $CC_1 \parallel BB_1$ BB1 = 7 см Найти: CC_1 Решение. 1. Докажем, что все точки лежат в одной плоскости. Прямая CC_1 параллельна BB_1, следовательно, через них можно провести плоскость β. Точки С, C_1, В, B_1 будут принадлежать плоскости β. Так как две точки С и В прямой АВ принадлежат плоскости β, то точка А этой прямой тоже будет принадлежать плоскости β. Теперь все точки принадлежат одной плоскости.	Текст Задача 1. Точка С лежит на отрезке АВ. Через точку А проведена плоскость, а через точки В и С параллельные прямые, пересекающие эту плоскость соответственно в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если точка С – середина отрезка АВ и $BB_1 = 7$ см. Картинка  Текст Дано: $\grave{A} \in \alpha$ С – середина АВ $CC_1 \parallel BB_1$ $BB_1 = 7$ см Найти: CC_1

1. Рассмотрим ΔABB_1 C – середина AB, $CC_1 \parallel BB_1 \Rightarrow CC_1$ средняя линия ΔABB1. $\tilde{N}\tilde{N}_1 = \frac{\hat{A}\hat{A}_1}{2} = \frac{7}{2}$ Ответ: 3,5 см	Решение. 1.Докажем, что все точки лежат в одной плоскости. $CC_1 \parallel BB_1$ через них можно провести плоскость β. Точки C, C_1, B, B_1 будут лежат в плоскости β $\left.\begin{matrix} C \in \beta \\ B \in \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow CB \subset \beta, \quad A \in \beta$ Теперь все точки принадлежат одной плоскости. 2. Рассмотрим ΔABB_1 C – середина AB, $CC_1 \parallel BB_1 \Rightarrow CC_1$ средняя линия ΔABB1. $\tilde{N}\tilde{N}_1 = \frac{\hat{A}\hat{A}_1}{2} = \frac{7}{2}$ =3,5см Ответ: 3,5 см
Задача 2. Средняя линия трапеции лежит в плоскости α, Пересекают ли прямые, содержащие ее основания, плоскость α? Ответ обоснуйте. Решение. Средняя линия трапеции параллельна основаниям. То есть KL параллельна BC и AD, и так как KL лежит в плоскости альфа, то по теореме о трех параллельных прямых Прямые, содержащие основания, параллельны плоскости α, поэтому они не пересекают плоскость α. Ответ: Нет.	Текст Задача 2. Средняя линия трапеции лежит в плоскости α, Пересекают ли прямые, содержащие ее основания, плоскость α? Ответ обоснуйте. Картинка  Текст Дано: ABCD – трапеция KL – ср. линия трапеции $KL \subset \alpha$ Найти: Пересекают ли прямые BC и AD плоскость α? Решение. Средняя линия трапеции параллельна основаниям. $\left.\begin{matrix} BC \parallel KL \\ KL \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \parallel \alpha$ $\left.\begin{matrix} AD \parallel KL \\ KL \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD \parallel \alpha$ $\Rightarrow$ BC и AD не пересекают плоскость α

	Ответ: Нет

Написать конспект и разобрать задачи