21 ноября математика 1 курс юристы.

ТЕМА:

Уравнения сферы, плоскости и прямой.

Используя лекцию (см. ниже) выполнить задания: подписать тему,

1. Записать параметрическое уравнение прямой в пространстве;
2. Записать уравнение плоскости в пространстве;
3. Записать уравнение сферы и сделать её чертёж;

На оценку «3», выписываете примеры 1- 2 с решениями из лекции;

На «4» и «5» примеры не надо выписывать, делаете задания 1- 3.

1. Уравнение прямой в пространстве.

§ 55*. Уравнения прямой в пространстве

Поскольку прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей, то одним из способов аналитического задания прямой в пространстве является задание с помощью системы из двух уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$$

задающих пару пересекающихся плоскостей.

Рассмотрим другой способ аналитического задания прямой. Для этого заметим, что для задания прямой в пространстве достаточно задать или пару точек $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, через которые проходит эта прямая, или точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой и направляющий вектор $\vec{e}(a, b, c)$, параллельный этой прямой или лежащий на ней.

Если прямая задана двумя точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, то в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ с координатами $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, а в качестве точки A_0 какую-нибудь из точек A_1, A_2.

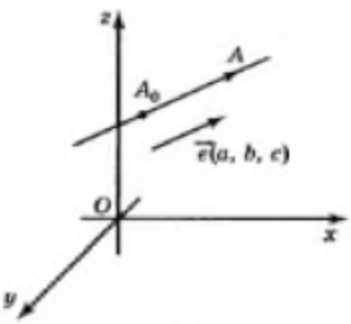


Рис. 247

Найдем условия, которым должны удовлетворять координаты точки $A(x, y, z)$, чтобы она принадлежала прямой a, проходящей через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ с направляющим вектором $\vec{e}(a, b, c)$ (рис. 247).

В этом случае вектор $\overrightarrow{A_0A}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ должен быть коллинеарен вектору $\vec{e}(a, b, c)$, и, следовательно, координаты этих векторов должны быть пропорциональны, т. е. должны выполняться равенства

$$\begin{cases} x - x_0 = at, \\ y - y_0 = bt, \\ z - z_0 = ct, \end{cases}$$

где t — действительное число.

Перепишем эти уравнения в виде

$$\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0. \end{cases}$$

2. Уравнение плоскости в пространстве.

§ 54. Уравнение плоскости в пространстве

В курсе планиметрии доказывалось, что прямая на плоскости задается уравнением $ax + by + c = 0$, в котором a, b, c — действительные числа, причем a, b одновременно не равны нулю. В пространстве имеет место аналогичная теорема.

Теорема. Плоскость в пространстве задается уравнением

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0,}$$

где a, b, c, d — действительные числа, причем a, b, c одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой плоскости и называемого **вектором нормали**.

Доказательство. Пусть точка $A_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит плоскости и $\vec{n}(a, b, c)$ — перпендикулярный этой плоскости вектор (рис. 246). Тогда произвольная точка $A(x, y, z)$ будет принадлежать этой плоскости в том и

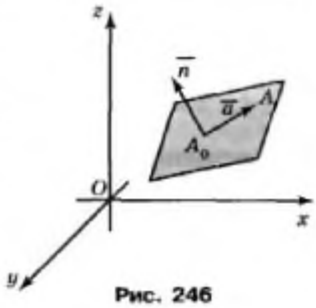
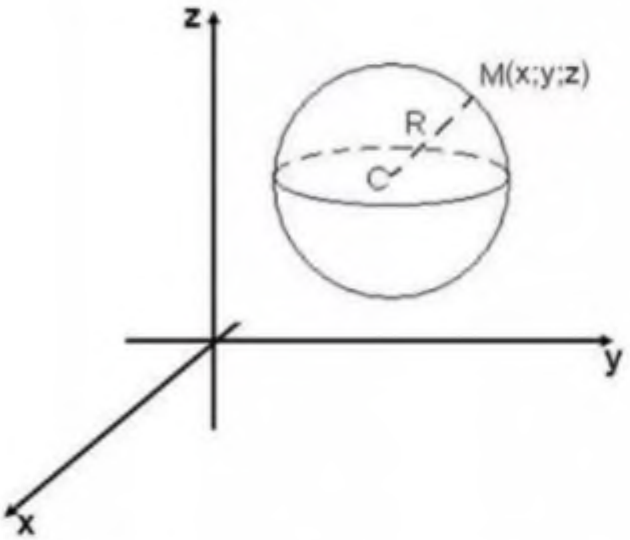


Рис. 246

3. Уравнение сферы в пространстве.

Определение. Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии R от данной точки O.

R – радиус сферы, т. O – центр сферы.



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \text{, где}$$

точка (x_0, y_0, z_0) – центр сферы.

Сфера – пространственный аналог окружности.

Пример 1. Написать уравнение сферы с центром в точке (1; 0; -5) и радиусом $\sqrt{3}$.

Решение:

(1; 0; -5) $\Rightarrow x_0 = 1; y_0 = 0; z_0 = -5$; r = $\sqrt{3}$

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-(-5))^2 = \sqrt{3}^2$$
$$(x-1)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 3$$

Ответ: $(x-1)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 3$

Пример 2. Дано уравнение сферы $(x+3)^2 + y^2 + (z-5)^2 = 49$. Найти координаты центра и радиус сферы

Решение:

Найдём координаты центра, для этого приравняем каждое слагаемое без квадрата к нулю:

$$x+3=0 \quad y=0 \quad z-5=0$$
$$x=-3 \Rightarrow x_0=-3 \qquad y=0 \Rightarrow y_0=0 \qquad z=5 \Rightarrow z_0=5$$

точка (- 3, 0, 5) – центр сферы

Найдем радиус сферы, для этого извлечём квадратный корень из правой части заданного равенства:

$$R^2 = 49$$
$$R = \sqrt{49}$$
$$R = 7$$

Ответ: (- 3, 0, 5), R = 7.

а) d> R, сфера и плоскость не имеют общих точек;

б) d = R, то сфера и плоскость имеют только одну общую точку.

в) d <R, сечение сферы плоскостью есть окружность.

Задание 1. Заполните таблицу, где R- радиус сферы, d- расстояние от центра сферы до плоскости

R	d	Взаимное расположение сферы и плоскости
5 дм	50 см	
1 м	65 см	
9 дм	85 см	
8 см		Не имеют общих точек
8 см		Имеют только одну общую точку
8 см		Пересекаются по окружности

Задание 2. Написать уравнение сферы с центром в точке (3; -2; 4) и радиусом 6

Задание 3. Дано уравнение сферы $(x-2)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 25$. Найти координаты центра и радиус сферы.