21 октября. математика 1 курс технологи

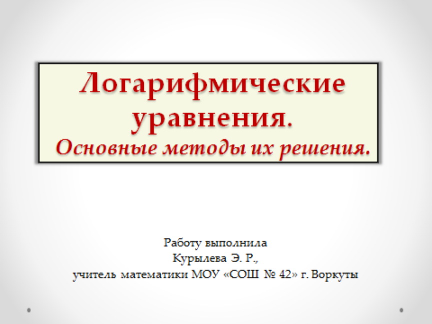
Добрый день, уважаемые студенты! Я жду ваши домашние задания на электронную почту.

Задания теперь выполняйте и присылайте мне на электронную почту или в вайбер. Можно выполнить в тетради сфотографировать и послать. Желаю успехов!

Файл с заданием отправьте преподавателю на почту mariaeva.vera@yandex.ru

Лекция «Логарифмические уравнения. Основные методы их решения».

Слайд 1.



Эпиграфом своей сегодняшней лекции я привожу слова Ричарда Олдингтона (1892 – 1962гг., английский поэт, прозаик, критик): «Ничему тому, что важно знать, научить нельзя, - всё, что может сделать учитель, это указать дорожки».

Слайд 2.

А так же – русскую народную пословицу: «Кто говорит – тот сеет, кто слушает – тот собирает».

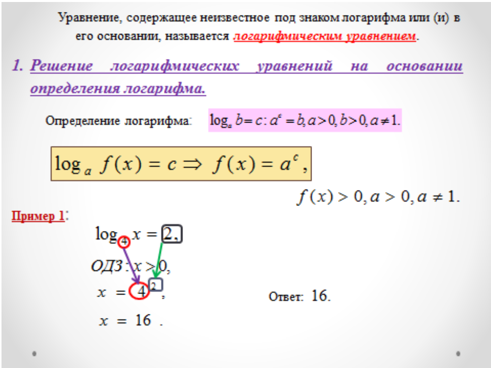
В самом начале моей лекции я хотела бы обратить ваше внимание на следующее. При решении логарифмических уравнений применяют преобразования, которые не приводят к потере корней, но могут привести к приобретению посторонних корней. Поэтому проверка каждого из полученных корней обязательна, если нет уверенности в равносильности уравнений. Здесь возможны два подхода:

1. Проверка путём подстановки полученных решений в *исходное* уравнение.
2. Нахождение области допустимых значений уравнения (ОДЗ). Тогда корнями могут быть только те числа, которые принадлежат этой области.

В своей лекции я буду использовать оба этих подхода, а ваше право уже самим выбирать, какой лично вам больше нравится. Следует отметить, что при решении логарифмических неравенств возможен только один из них: ОДЗ!

Основные методы решения логарифмических уравнений.

***Слайд 3*.**



Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется **логарифмическим уравнением**.

1. *Решение логарифмических уравнений на основании определения логарифма.*

Определение логарифма: Логарифмом числа *b* по основанию *a* называется показатель степени, в которую нужно возвести основание *a*, чтобы получить число *b*. Т. е. $\log_a b = c : a^c = b, a > 0, b > 0, a \neq 1.$

Таким образом, применяя его к нашей теме, мы получим следующее:

$$\log_a f(x) = c \Rightarrow f(x) = a^c, \text{при этом } f(x) > 0, a > 0, a \neq 1.$$

Пример 1: $\log_4 x = 2,$

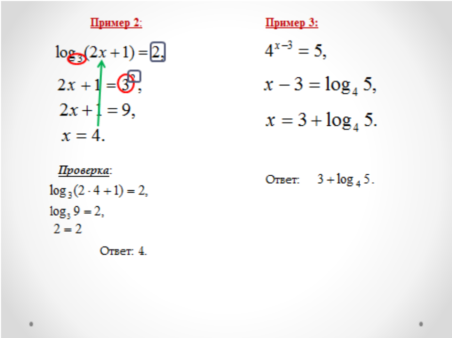
$ОДЗ: x > 0,$

$x = 4^2,$

$x = 16.$

Число 16 удовлетворяет ОДЗ,
значит 16 – корень исходного уравнения.
Ответ: 16.

***Слайд 4*.**



Пример 2: $\log_3(2x+1)=2,$

$$2x+1=3^2,$$
$$2x+1=9,$$
$$x=4.$$

Проверка: $\log_3(2\cdot 4+1)=2,\quad \log_3 9=2,\;\; 2=2$ - верно, значит число 4 – корень исходного уравнения.

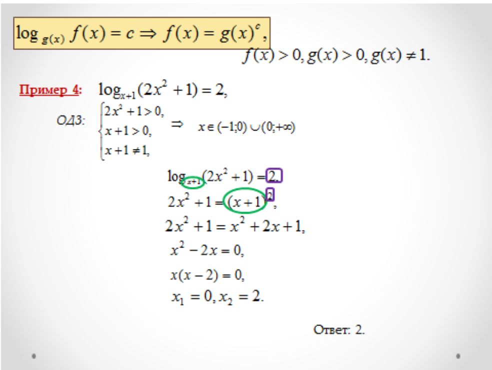
Ответ: 4.

Пример 3: $4^{x-3}=5,$

По определению логарифма $x-3=\log_4 5,$ значит $x=3+\log_4 5.$

Ответ: $3+\log_4 5.$

Слайд 5.



А сейчас мы рассмотрим пример, в котором в основании логарифма уже не число, а выражение, содержащее переменную. Т. е. уравнение будет иметь вид $\log_{g(x)} f(x)=c \Rightarrow f(x)=g(x)^c$, при этом $f(x)>0, g(x)>0, g(x)\neq 1.$ Хочу отметить особо, что рассуждения НЕ ИЗМЕНИЛИСЬ!

Пример 4: $\log_{x+1}(2x^2+1)=2,$

$$ОДЗ: \begin{cases} 2x^2+1>0, \\ x+1>0, \\ x+1\neq 1, \end{cases} \Rightarrow x\in(-1;0)\cup(0;+\infty).$$

$$\log_{x+1}(2x^2+1)=2,$$
$$2x^2+1=(x+1)^2,$$

$$2x^2+1=x^2+2x+1,$$
$$x^2-2x=0,$$
$$x(x-2)=0,$$
$$x_1=0, x_2=2.$$

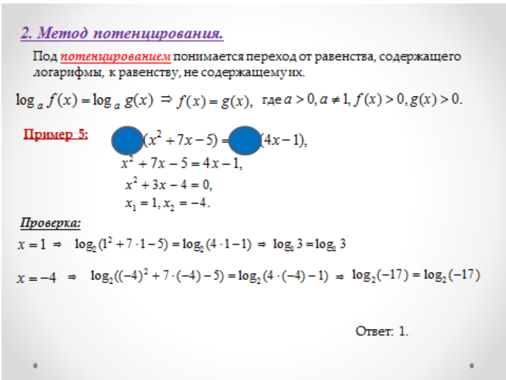
С учётом ОДЗ получим, что решением данного уравнения является число 2.

Ответ: 2.

Как мы видим, наличие выражения с переменной в основании влияет лишь на ОДЗ, а не на ход рассуждений. Кроме того, данное уравнение можно решать, не прибегая к нахождению ОДЗ, а просто в конце выполнить проверку.

2. Метод потенцирования.

Слайд 6.



Под потенцированием понимается переход от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их.

$$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Rightarrow f(x)=g(x), \text{ где } a>0, a\neq 1, f(x)>0, g(x)>0.$$

Пример 5: $\log_2(x^2+7x-5)=\log_2(4x-1),$

$$x^2+7x-5=4x-1,$$
$$x^2+3x-4=0,$$
$$x_1=1, x_2=-4.$$

Проверка:

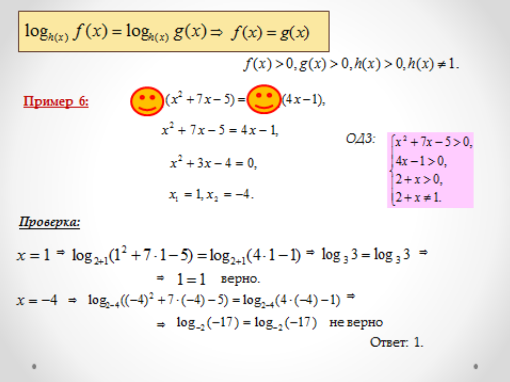
$x=1 \Rightarrow \log_2(1^2+7\cdot 1-5)=\log_2(4\cdot 1-1) \Rightarrow \log_2 3=\log_2 3$ - верно.

$x=-4 \Rightarrow \log_2((-4)^2+7\cdot(-4)-5)=\log_2(4\cdot(-4)-1) \Rightarrow \log_2(-17)=\log_2(-17)$ - не верно.

Значит, только число 1 является решением исходного уравнения.

Ответ:1.

Слайд 7.



Если же в основании – выражение с переменной, то рассуждения не меняем! В этом случае уравнение будет иметь вид

$$\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x) \Rightarrow f(x) = g(x), \text{ где } \qquad f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1.$$

И пример такого уравнения можно разобрать на предыдущем примере 5.

Пример 6: $\log_{2+x}(x^2 + 7x - 5) = \log_{2+x}(4x - 1),$

$$x^2 + 7x - 5 = 4x - 1,$$
$$x^2 + 3x - 4 = 0,$$
$$x_1 = 1, x_2 = -4.$$

Проверка:

$x = 1 \Rightarrow \log_{2+1}(1^2 + 7 \cdot 1 - 5) = \log_{2+1}(4 \cdot 1 - 1) \Rightarrow \log_3 3 = \log_3 3 \Rightarrow 1 = 1$ - верно.

$x = -4 \Rightarrow \log_{2-4}((-4)^2 + 7 \cdot (-4) - 5) = \log_{2-4}(4 \cdot (-4) - 1) \Rightarrow \log_{-2}(-17) = \log_{-2}(-17)$ - не верно.

Значит, только число 1 является решением исходного уравнения.

Ответ:1.

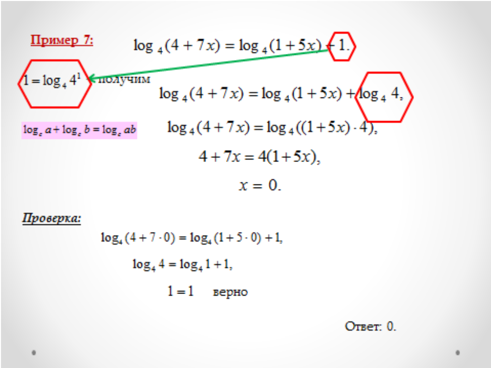
ОДЗ для данного уравнения выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x^2 + 7x - 5 > 0, \\ 4x - 1 > 0, \\ 2 + x > 0, \\ 2 + x \neq 1. \end{cases}$$

Мы видим, что в этом уравнении рациональнее выполнить проверку, а не искать ОДЗ. Но ещё раз повторюсь, что при решении неравенств ОДЗ находить придётся ОБЯЗАТЕЛЬНО.

Рассмотрим пример, который, на первый взгляд, не может относиться к данному типу уравнений.

Слайд 8.



Пример7: $\log_4(4+7x)=\log_4(1+5x)+1.$

Сделаем замену $1=\log_4 4^1$, получим $\log_4(4+7x)=\log_4(1+5x)+\log_4 4,$

воспользовавшись свойством логарифма (сумма логарифмов равна логарифму произведения подлогарифмических выражений: $\log_c a+\log_c b=\log_c ab$), получим уравнение $\log_4(4+7x)=\log_4((1+5x)\cdot 4),$ которое в свою очередь замечательно решается методом потенцирования, т. е.

$4+7x=4(1+5x).$ А это линейное уравнение, решив которое, получим $x=0.$

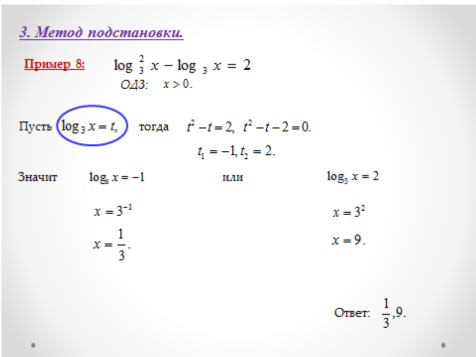
Проверка: $\log_4(4+7\cdot 0)=\log_4(1+5\cdot 0)+1,$ $\log_4 4=\log_4 1+1,$ $1=1$ - верно.

Ответ: 0.

Замечу, что часто перед применением какого-либо метода решений, необходимо преобразовать уравнение, применив различные свойства логарифмов. Предыдущий пример, тому подтверждение.

3. *Метод подстановки.*

Слайд 9.



Данный метод мы достаточно часто встречаем в математике, вспомните тригонометрические или показательные уравнения. Поэтому применение его при решении логарифмических уравнений я вам покажу на примере.

Пример 8: $\log_3^2 x - \log_3 x = 2$.

В этом уравнении рациональней найти ОДЗ: $x > 0$.

Пусть $\log_3 x = t$, тогда уравнение примет вид

$t^2 - t = 2$,
$t^2 - t - 2 = 0.$
$t_1 = -1, t_2 = 2.$

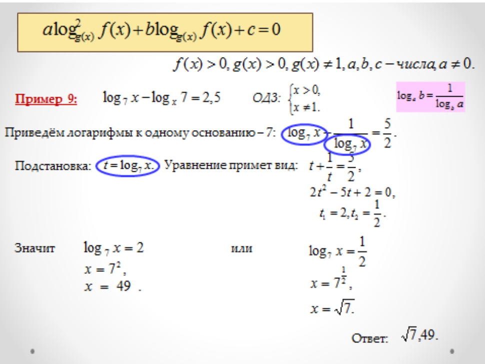
Значит $\log_3 x = -1$ или $\log_3 x = 2$. А это уравнения, которые мы решим, используя определение: 1) $\log_3 x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$.

2) $\log_3 x = 2 \Rightarrow x = 3^2 \Rightarrow x = 9.$

Мы видим, что оба корня удовлетворяют ОДЗ, значит оба числа являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{3}$,9.

Слайд 10.



Если в основании логарифма лежит выражение с переменной, то уравнение в общем виде будет выглядеть следующим образом:

$a\log^2_{g(x)} f(x) + b\log_{g(x)} f(x) + c = 0$, где $f(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1, a, b, c - числа, a \neq 0.$

И опять, вы сами выбираете: ОДЗ или проверка.

Пример 9: $\log_7 x - \log_x 7 = 2,5$.

$$ОДЗ: \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Приведём логарифмы к одному основанию – 7, пользуясь свойством перехода к новому основанию $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, получим:

$\log_7 x - \dfrac{1}{\log_7 x} = \dfrac{5}{2}$, выполним подстановку $t = \log_7 x$, получим уравнение

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2},$$
$$2t^2 - 5t + 2 = 0,$$
$$t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}.$$

Значит, $\log_7 x = 2$ или $\log_7 x = \dfrac{1}{2}$.

$x = 7^2$, $\quad x = 7^{\frac{1}{2}}$,

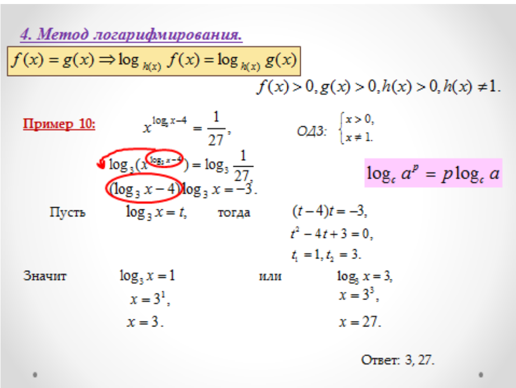
$x = 49$. $\quad x = \sqrt{7}$.

Оба числа удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $\sqrt{7}, 49$.

4. *Метод логарифмирования.*

Слайд 11.



Данный метод является «обратным» методу потенцирования, т. е. мы от уравнения без логарифмов переходим к уравнению, их содержащему.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x), \text{ при этом } f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1.$$

Этот метод обычно используется, если в уравнении есть показательные функции, логарифмы – в показателе. Рассмотрим этот метод на примере.

Пример 10: $x^{\log_3 x-4}=\frac{1}{27}$,

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 3:

$\log_3(x^{\log_3 x-4})=\log_3\frac{1}{27,}$ а теперь воспользуемся свойством логарифмов $\log_c a^p = p\log_c a$, получим

$$(\log_3 x-4)\log_3 x=-3.$$

Выполним подстановку $t=\log_3 x$, получим уравнение

$(t-4)t=-3,$

$t^2-4t+3=0,$

$t_1=1, t_2=3.$

Значит, $\log_3 x=1$ или $\log_3 x=3,$.

$x=3^1,$ $\quad$ $x=3^3,$

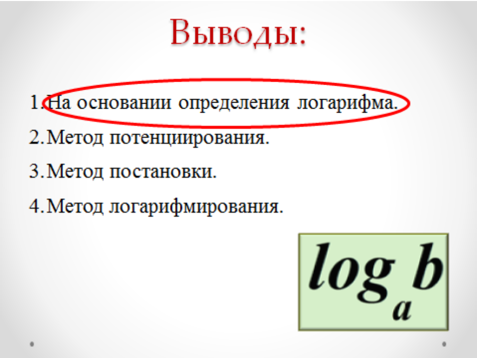
$x=3.$ $\quad$ $x=27.$

Оба числа удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: 3, 27.

Этот пример показывает, что при решении логарифмических уравнений, возможна комбинация нескольких методов. А значит необходимо уметь пользоваться каждым из них. Научиться этому – теперь ваша задача.

Слайд 12.



Итак, сегодня мы с вами рассмотрели основные методы решения логарифмических уравнений:

1. На основании определения логарифма.

2. Метод потенцирования.
3. Метод постановки.
4. Метод логарифмирования.

Главным, по моему мнению, является метод, основанный на определении логарифма. Практически в каждом их других методов происходит «выход» на него. Кроме того, на примерах мы увидели, что все методы взаимосвязаны, в «чистом» виде при решении уравнений не используется ни один из них. Поэтому вам необходимо уметь пользоваться КАЖДЫМ!

Для отработки навыков решения логарифмических уравнений, я вам предлагаю следующее домашнее задание. Уравнения являются базовыми, т. е. решать их должен уметь решать каждый. .

№ п/п	Уравнения	Комментарии
1	$\log_3(9+x)=4$	Пользуясь определением
2	$\log_{\frac{1}{7}}(7-3x)=-2$	Пользуясь определением
3	$\log_3(14-x)=\log_3 5$	Потенциирование
4	$\log_2(1+x)=\log_2 4$	Потенциирование
5	$\log_3(x+4)=\log_3(2x-12)$	Потенциирование
6	$\log_8(x^2+x)=\log_8(x^2-4)$	Потенциирование
7	$\log_4(8-5x)=2\log_8 3$	Применить свойства логарифмов и затем потенциировать
8	$\log_2(8+3x)=\log_2(3+x)+1$	Применить свойства логарифмов и затем потенциировать
9	$\log_{x+5} 4=2$	Пользуясь определением
10	$\log_8 2^{6x-3}=4$	Пользуясь определением, выход на показательное уравнение
11	$2^{\log_8(5x-3)}=4$	Показательное уравнение, выход на логарифмическое

Литература.

1. А.Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, Б. М. Ивлев, С. И. Шварцбурд Алгебра и начала анализа 10-11 класс. - М.: Просвещение, 2005.
2. Математика. Тренировочные тематические задания повышенной сложности с ответами для подготовки к ЕГЭ и другим формам выпускного и вступительного экзаменов/сост. Г. И. Ковалёва, Т. И. Бузулина, О. Л. Безрукова, Ю. А., Ю. А. Розка – Волгоград:Учитель, 2007.

3. С. А. Шестакова, П. И. Захаров. ЕГЭ 2013. Математика. Задача С1. Уравнения и системы уравнений. Под редакцией А. Л. Семёнова и И. В. Ященко - Москва, изд. МЦНМО, 2013.
4. Открытый банк заданий по математике http://mathege.ru.
5. Образовательный портал для подготовки к экзаменам Дмитрия Гущина: РЕШУ ЕГЭ по математике http://reshuege.ru/.
6. Сайт ФИПИ www.fipi.ru.
7. Сайт Виртуальная школа юного математика http://www.math.md/school/praktikum/logr/logr.html.