19 декабря математика 1 курс юристы. Выписать формулы, знать правило их применения, решить № 524, 525

Формулы приведения

Таблицы значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса составляются для углов от 0^0 до 90^0 (или от 0 до $\frac{\pi}{2}$). Это объясняется тем, что их значения для остальных углов сводятся к значениям для ***острых углов.***

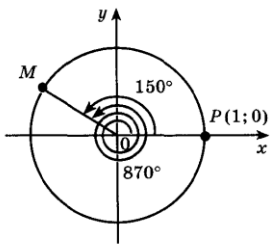

Рис. 66

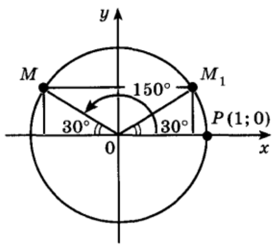

Рис. 67

Задача 1. Вычислить ***sin 870°*** и ***cos 870°***. **Решение.** Заметим, что ***870° = 2 • 360°+ 150°.*** Следовательно, при повороте точки ***P(1; 0)*** вокруг начала координат на ***870°*** точка совершит два полных оборота и еще повернется на угол ***150°***, т. е. получится та же самая точка М, что и при повороте на ***150°*** (рис. 66). Поэтому ***sin 870° = sin 150°, cos 870° = cos 150°.***

Построим точку M_1, симметричную точке ***M*** относительно оси ***Oy*** (рис. 67). *Ординаты* точек ***M*** и M_1 одинаковы, а *абсциссы* отличаются только знаком. Поэтому $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Ответ*: $\sin 870° = \frac{1}{2}$, $\cos 870° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 2. При решении *задачи* ***1*** использовались равенства

$\sin(2 \cdot 360° + 150°) = \sin 150°$, $\cos(2 \cdot 360° + 150°) = \cos 150°$, **(1)**

$\sin(180° - 30°) = \sin 30°$, $\cos(180° - 30°) = -\cos 30°$. **(2)**

Равенства (**1**) верны, так как при повороте точки ***P(1; 0)*** на угол $\alpha + 2\pi k$, $k \in Z$, получается та же самая точка, что и при повороте на угол **α**.

Следовательно, верны формулы $\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha$, $k \in Z$. **(3)**

Равенства (**2**) являются частными случаями формул $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$. **(4)**

Докажем формулу $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$. Применяя *формулу сложения для синуса*, имеем

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha = 0 \cdot \cos\alpha - (-1)\sin\alpha = \sin\alpha$.

Аналогично доказывается и вторая из формул (**4**). Формулы (**4**) называются ***формулами приведения.***

Вообще ***формулами приведения для синуса*** и ***формулами приведения для косинуса*** называют соответственно следующие шесть формул:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha,$$
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \qquad (5)$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha, \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha, \qquad (6)$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha.$$

Формулы (**5**) и (6) справедливы при любых значениях **α.**

Задача 2. Вычислить ***sin 930°.*** **Решение.** Используя из формул (**3**) первую, получаем

$\sin 930° = \sin(3 \cdot 360° - 150°) = \sin(-150°)$. По формуле $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ имеем $\sin(-150°) = -\sin 150°$.

По формуле (**4**) находим: $-\sin 150° = -\sin(180° - 30°) = -\sin 30° = -1$. *Ответ.* $\sin 930° = -\frac{1}{2}$.

Задача 3. Вычислить $\cos\frac{15\pi}{4}$. **Решение.**

$$\cos\frac{15\pi}{4} = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Покажем теперь, как можно свести вычисление *тангенса любого угла* к вычислениям *тангенса острого угла.* Отметим, что из формул (**3**) и определения *тангенса* следует равенство

tg **(α + 2 *πk*) = *tg* α, *k*** ∈ ***Z.*** Используя это равенство и формулы (**4**), получаем

tg **(α + *π) = tg*** **(α + *π*- 2 *π*) = *tg*** **(α - *π*) =** $-\mathrm{tg}\,(\pi-\alpha)=-\frac{\sin\,(\pi-\alpha)}{\cos\,(\pi-\alpha)}=-\frac{\sin\,\alpha}{-\cos\,\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha.$

Следовательно, справедлива формула ***tg*** **(α + *πk*) = *tg* α, *k*** ∈ ***Z.*** (7)

Аналогично доказывается формула ***ctg*** **(α + *πk*) = *ctg* α, *k*** ∈ ***Z.*** (**8**)

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{ctg}\,\alpha,\qquad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{ctg}\,\alpha,$$
$$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{tg}\,\alpha,\qquad \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{tg}\,\alpha. \qquad (9)$$

Следующие четыре формулы называют ***формулами приведения для тангенса и котангенса:*** Формулы (**9**) справедливы для всех допустимых значениях **α.**

Формулы приведения для синуса и косинуса доказываются с помощью формул сложения аналогично тому, как доказана первая формула (**4**). Формулы (**9**) можно получить из формул (**5**) и (**6**), зная, что ***tg*** **α =** $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ **.**

Формулы приведения необязательно запоминать. Для того чтобы записать любую из них, можно руководствоваться следующими ***правилами:***

1) В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ **.**

2) Если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ или $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, то синус ***заменяется*** на косинус, тангенс — на котангенс и наоборот. Если угол равен ***π* ± *α,*** то ***замены не происходит***.

Например, покажем, как с помощью этих правил можно получить *формулу приведения* для $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$. По первому правилу в правой части формулы надо поставить знак «-», так как если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}+\alpha<\pi$, а косинус во второй четверти *отрицателен*.

По второму правилу *косинус* нужно заменить на *синус*, следовательно, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\,\alpha.$

Итак, формулы (**3**), (**7**) и *формулы приведения* позволяют свести вычисление синуса, косинуса, тангенса и котангенса *любого угла* к вычислению их значений для ***острого угла.***

Итак. *Формула приведения* — это обычный синус (или косинус) суммы или разности двух аргументов, но записанный в таком виде, что все вычисления значительно сокращаются.

Применяются только для конструкция вида: $\sin\left(\frac{\pi\cdot n}{2}+\alpha\right);\ \cos\left(\frac{\pi\cdot n}{2}+\alpha\right);\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi\cdot n}{2}+\alpha\right)$

Другими словами, первое слагаемое должно быть кратно ***π/2.*** Они применяются к суммам и разностям аргументов и включают в себя ***два правила***:

1).Если первый аргумент стоит на вертикальной оси координатной окружности, то ***функция меняется на «противоположную»***: синус — на косинус, тангенс — на котангенс и т.д. Если же первый аргумент стоит на горизонтальной оси, ***функция не меняется***.

2).При этом спереди у новой функции следует поставить знак «***минус***», если исходная функция принимала отрицательное значение при малом ***α***. Либо оставить «***плюс***», если при малом ***α*** функция положительна.

524 Найти острый угол α, при котором выполняется равенство:

1) $\cos 75° = \cos(90° - \alpha)$; 2) $\sin 150° = \sin(90° + \alpha)$;
3) $\sin 150° = \sin(180° - \alpha)$; 4) $\cos 310° = \cos(270° + \alpha)$;
5) $\sin \frac{5}{4}\pi = \sin(\pi + \alpha)$; 6) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
7) $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\frac{11}{6}\pi = \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$.

Используя формулы приведения, вычислить (525—526).

525 1) $\cos 150°$; 2) $\sin 135°$; 3) $\operatorname{ctg} 135°$; 4) $\cos 120°$;
5) $\cos 225°$; 6) $\sin 210°$; 7) $\operatorname{ctg} 240°$; 8) $\sin 315°$.

526 1) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{7\pi}{6}$; 3) $\cos\frac{5\pi}{3}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}$;
5) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; 6) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 7) $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.

Упростить выражение (527—528).

527 1) $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{ctg}(\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$.

528 1) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)} \cdot \dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\pi + \alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin^2(\pi + \alpha) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.