17 декабря математика 1 курс юристы.

Выучить, записать формулы и решить некоторые примеры на выбор. Прислать на проверку.

Синус, косинус и тангенс двойного угла

Чтобы получить тригонометрические ***формулы двойного аргумента*** достаточно в *формулах сложения* β заменить на α.

1. $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Итак, $\underline{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$ **(1)**

2. $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Итак, $\underline{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$. **(2)**

Задача 1. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. **Решение**. По формуле (1) находим $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot(-6)\cdot\cos\alpha = -1{,}2\cdot\cos\alpha$. Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$, и поэтому $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8$. Следовательно, $\sin\alpha = -1{,}2\cdot(-0{,}8) = 0{,}96$

Задача 2 . Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}3$. **Решение.** Используя формулу (**2**) и основное тригонометрическое тождество, имеем $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 2(0{,}3)^2 - 1 = -0{,}82$.

Задача 3 . Упростить выражение $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$. **Решение**. $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha$.

Задача 4. Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. **Решение.** Полагая в формуле $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ $\beta = \alpha$, получаем $\underline{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.}$ (**3**). Если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, то по формуле (**3**) находим $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$.

Выразить синус, косинус или тангенс, используя формулы двойного угла (498—499).

498 1) $\sin 48°$; 2) $\cos 164°$; 3) $\operatorname{tg} 92°$; 4) $\sin\frac{4\pi}{3}$; 5) $\cos\frac{5\pi}{3}$.

499 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 5) $\sin\alpha$; 6) $\cos\alpha$.

Вычислить, не используя калькулятор (500—502).

500 1) $2\sin 15°\cdot\cos 15°$; 2) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$; 3) $\frac{2\operatorname{tg}15°}{1-\operatorname{tg}^2 15°}$; 4) $(\cos 75° - \sin 75°)^2$.

501 1) $2\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}$; 2) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$; 3) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.

502 1) $2\sin 75°\cdot\cos 75°$; 2) $\cos^2 75° - \sin^2 75°$; 3) $\frac{6\operatorname{tg}75°}{1-\operatorname{tg}^2 75°}$; 4) $\frac{\operatorname{tg}^2 22°30' - 1}{\operatorname{tg} 22°30'}$.

503 Вычислить $\sin 2\alpha$, если:
1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

504 Вычислить $\cos 2\alpha$, если:
1) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$.

505 Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$.

Упростить выражение (506—507).

506 1) $2\cos 40°\cdot\cos 50°$; 2) $2\sin 25°\cdot\sin 65°$; 3) $\sin 2\alpha + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$; 4) $\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha$.

507 1) $\frac{\sin 2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}$; 2) $\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$.

508 Доказать тождество:
1) $\sin 2\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1$;
2) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$;
3) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$; 4) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 1$

Синус, косинус и тангенс половинного угла

По известным значениям $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ можно найти значения $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ если известно, в какой четверти лежит угол α. Из формулы $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ при $x = \frac{\alpha}{2}$ получаем

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

Запишем основное тригонометрическое тождество в виде $1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ **(2)**

Складывая равенства **(1)** и **(2)** и вычитая из равенства **(2)** равенство **(1)**, получаем

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad (3)$$

$$1 - \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad (4)$$

Формулы **(3)** и **(4)** можно записать так: $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$, **(5)** $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$. **(6)**

Формулы **(5)** и **(6)** называют ***формулами синуса и косинуса половинного угла***. Иногда их называют также ***формулами понижения степени***.

Если известен $\cos\alpha$, то из формул **(5)** и **(6)** можно найти $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$ и $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$. Знаки $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ могут быть определены, если известно, в какой четверти лежит угол $\frac{\alpha}{2}$.

Задача 1. Вычислить $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -0{,}02$ и $0 < \alpha < \pi$. **Решение.** По формуле **(5)** $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1-0{,}02}{2} = 0{,}49$. Так как $0 < \alpha < \pi$, то $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, и поэтому $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$.

Следовательно, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7$. Разделив равенство **(6)** на равенство (5), получим ***формулу тангенса половинного угла***. $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$. (7)

Задача 2. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = 0{,}8$ и $\pi < \alpha < 2\pi$. **Решение.** По формуле (7) имеем $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-0{,}8}{1+0{,}8} = \frac{0{,}2}{1{,}8} = \frac{1}{9}$. По условию $\pi < \alpha < 2\pi$, поэтому $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < 0$.

Следовательно $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}$.

Задача 3. Упростить выражение $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1+\cos\alpha}{2}$. **Решение**.

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2\frac{\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Задача 4. Решить уравнение $1 + \cos 2x = 2\cos x$. **Решение.** Т.к. $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$, то данное уравнение примет вид $2\cos^2 x = 2\cos x$, откуда $\cos x(\cos x - 1) = 0$.

1) $\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$. *2)* $\cos x = 1,\ x = 2\pi n,\ n \in Z$. Итак исходное уравнение имеет две серии корней $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ и $x = 2\pi n,\ n \in Z$. В ответе можно записывать обе серии с одной буквой (***k*** или ***n***). *Ответ*. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x = 2\pi k,\ k \in Z$.

Задача 5. Выразить $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **Решение**.1). $\sin\alpha = \sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. Итак, $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. (8)

2). $\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. Итак, $\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. **(9)**

3). $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. Итак, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. **(10)**. Эту формулу можно получить почленным делением равенств **(8)** и **(9)**.

Итак, по формулам **(8)** – **(10)** можно находить синус, косинус и тангенс угла α, зная тангенс угла $\frac{\alpha}{2}$.

513 Выразить значения функции данного аргумента через значения функции удвоенного аргумента:

1) $\sin^2 15°$; 2) $\cos^2 \frac{1}{4}$; 3) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 4) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

514 Найти числовое значение выражения:

1) $2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$; 2) $1-2\sin^2\frac{\pi}{12}$;

3) $\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin^2 15°$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cos^2 15°$.

515 Пусть $\cos\alpha = 0{,}6$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

516 Пусть $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Вычислить:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.