15 декабря математика 1 курс юристы.
Знать формулы.
Порешать примеры, ответить на контрольные вопросы

Лекция

Тема: Тригонометрические формулы сложения

План

1. Формулы сложения для косинуса, для синуса, для тангенса и котангенса

2.Примеры решения упражнений

Формулы сложения для косинуса, для синуса, для тангенса и котангенса

Формулами сложения назиивают формулы,которые выражают $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\sin(\alpha \pm \beta)$, $tg(\alpha \pm \beta)$ через тригонометрические функции углов α і β

Докажем, что $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. Пусть точки P_1 и P_2 получены в результате поворота точки P_0 (1;0) на угол α і β соответственно. Рассмотрим случай когда $0 \le \alpha - \beta \le \pi$. Тогда углы между векторами OP_1 и OP_2 равно $\alpha - \beta$.Координаты точек P_1 і P_2 соответственно равны $(\cos\alpha;\sin\alpha)$ и $(\cos\beta;\sin\beta)$, тогда - OP_1 $(\cos\alpha;\sin\alpha)$ и OP_2 $(\cos\beta;\sin\beta)$. Скалярное произведение равно $OP_1 \cdot OP_2 = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. Одновременно по определению скалярного произведения векторов $OP_1 \cdot OP_2 = \cos(\alpha - \beta)$. Получаем формулу, которую называют **косинус разности.**

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

Докажем формулу **косинус суммы:**

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Формулы синуса суммы и синуса разности:

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$

Формулы тангенса суммы и тангенса разности:

$$\boxed{tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$$

Примеры решения упражнений

Пример 1.Упростить выражение: 1) $\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)-\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)$;

2) $\sin(\alpha+45^o)\cos(\alpha-45^o)-\cos(\alpha+45^o)\sin(\alpha-45^o)$; 3) $\frac{\sqrt{3}\sin\alpha+2\cos(60^o+\alpha)}{2\sin(60^o+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}$

Решение. 1) Применяя формулы синуса суммы и синуса разности, получаем:

$$\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)-\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)=(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha)-(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha)=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha=\sin\alpha.$$

2)Заменим данное выражение на синус разности аргументов $\alpha-45^o$і

$\alpha+45^o$.Получаем:

$\sin(\alpha+45^o)\cos(\alpha-45^o)-\cos(\alpha+45^o)\sin(\alpha-45^o)=\sin((\alpha+45^o)(\alpha-45^o))=1$

3) $$\frac{\sqrt{3}\sin\alpha+2\cos(60^o+\alpha)}{2\sin(60^o+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}\sin\alpha+2(\cos 60^o\cos\alpha-\sin 60^o\sin\alpha)}{2(\sin 60^o\cos\alpha+\cos 60^o\sin\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=$$

$$\frac{\sqrt{3}\sin\alpha+2(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha)}{2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha)}{2\cos\alpha+\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=ctg\alpha$$

Пример 2. Докажите тождество: 1) $\sin\alpha-\cos\alpha tg\frac{\alpha}{2}=tg\frac{\alpha}{2}$; 2) $ctg\alpha-tg\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

Решение

1) $$\sin\alpha-\cos\alpha tg\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha-\frac{\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin(\alpha-\frac{\alpha}{2})}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=tg\frac{\alpha}{2}$$

2) $$ctg\alpha-tg\beta=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

Пример 3 .Найти значение выражения $\frac{1-tg70^o tg65^o}{tg70^o tg65^o}$.

Решение

Используя формулу тангенса суммы углов 70º і 65º,

получаем $\frac{1-tg70^{\circ}tg65^{\circ}}{tg70^{\circ}tg65^{\circ}}=\frac{1}{tg(70^{\circ}+65^{\circ})}=\frac{1}{tg135^{\circ}}=ctg135^{\circ}=ctg(180^{\circ}-45^{\circ})=-ctg45^{\circ}=-1$

Упражнения для закрепления материала

1.Упрастить выражение:1) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$; 2) $\sin(30^{\circ}+\beta)-\cos(60^{\circ}+\beta)$;3) $\sqrt{2}\sin(\alpha-45^{\circ})-\sin\alpha+\cos\alpha$;4) $2\cos(60^{\circ}-\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$

2. Упрастить выражение:1) $\sin\alpha\cos4\alpha+\cos4\alpha\sin\alpha$;2) $\cos17^{\circ}\cos43^{\circ}-\sin17^{\circ}\sin43^{\circ}$;

3) $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$; 4) $\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)$.

3. Упрастить выражение:1) $\frac{tg13^{\circ}+tg47^{\circ}}{1-tg13^{\circ}tg47^{\circ}}$; 2) $\frac{tg1^{\circ}-tg46^{\circ}}{1+tg1^{\circ}tg46^{\circ}}$;

3) $\frac{1-tg27^{\circ}tg33^{\circ}}{tg27^{\circ}+tg33^{\circ}}$;4) $\frac{tg\frac{\pi}{9}+tg\frac{5\pi}{36}}{1-tg\frac{\pi}{9}tg\frac{5\pi}{36}}$

4.Доказать тождество: 1) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=1$; 2) $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(45^{\circ}+\alpha)}{2\sin(45^{\circ}+\alpha)-\sqrt{2}\sin\alpha}=tg\alpha$;

3) $\frac{\sin(45^{\circ}+\alpha)-\cos(45^{\circ}+\alpha)}{\sin(45^{\circ}+\alpha)+\cos(45^{\circ}+\alpha)}$; 4) $tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

5.Дано: $\sin\alpha=\frac{9}{41}, 90^{\circ}<\alpha<180^{\circ}$.Найти $\sin(\alpha+45^{\circ})$.

6.Найти $\cos(\alpha+\beta)$,якщо $\cos\alpha=\frac{3}{5}, 0<\alpha<90^{\circ}$ і $\cos\beta=-\frac{4}{5}$, $90^{\circ}<\beta<180^{\circ}$

Контрольные вопросы

1. Какие формулы называют формулами сложения?

2.Запишить формулу: 1) косинуса разности; 2) косинуса суммы; 3) синуса суммы; 4) синуса разности; 5) тангенса суммы; 6) тангенса разности.

Литература

1.Ш.А.Алимов, стр.144-148.

2.А.Г.Мерзляк, стр.203-208.

3..О.Н.Афанасьєва, стор.98-102