

12 декабря математика 1 курс ЖКХ

Тема: Бином Ньютона. Биномиальные коэффициенты и треугольник Паскаля.

Литература:

1. Халамайзер А.Я. Комбинаторика и бином Ньютона. - М: Просвещение. 1980
2. Прикладная комбинаторная математика
3. Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А.П. Савин. – М.: Педагогика, 1985г.

1. Бином Ньютона - название формулы, выражающей степень двучлена в виде суммы одночленов.

Формулу для квадрата двучлена

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

знали, еще математики Древнего Вавилона, а древнегреческие математики знали ее геометрическое истолкование.

Если умножить обе части этой формулы на $(a + b)$ и раскрыть скобки, то получим:

$$(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3,$$

$$\text{т. е. } (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Аналогичный шаг может привести к следующей формуле:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Легко заметить закон образования коэффициентов: коэффициент 4 при a^3b есть сумма коэффициентов 3 и 1 при a^2b и a^3 . Аналогично, коэффициент 6 при a^2b^2 является суммой $(3 + 3)$ коэффициентов при ab^2 и a^2b . По тому же закону получаем и коэффициент 4 при ab^3 .

Таким образом, коэффициент C_n^k при $a^{n-k} b^k$ в разложении $(a + b)^n$ равен сумме коэффициентов C_{n-1}^{k-1} и C_{n-1}^k при $a^{n-k} b^{k-1}$ и при $a^{n-k-1} b^k$ разложении $(a + b)^{n-1}$, а коэффициенты при a^n и при b^n равны единице.

Отсюда следует, что коэффициенты C_n^k в равенстве:

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + b^n \quad (1)$$

являются членами $(n+1)$ -й строки треугольника Паскаля.

Это утверждение было известно задолго до Паскаля - его знал живший в XI-XII вв. среднеазиатский математик и поэт Омар Хайям (к сожалению, его сочинение об этом до нас не дошло).

2. Биномиальные коэффициенты.

Первое дошедшее до нас описание формулы бинома Ньютона содержится в появившейся в 1265 г. книге среднеазиатского математика ат-Туси, где дана таблица чисел C_n^k (*биномиальных коэффициентов*) до $n = 12$ включительно.

Европейские ученые познакомились с формулой бинома Ньютона, по-видимому, через восточных математиков. Детальное изучение свойств биномиальных коэффициентов провел французский математик и философ Блез Паскаль в 1654 г. Еще до этого было известно, что числа

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

являются в то же время числами «сочетаний без повторений» из n элементов по k .

В 1664-1665 гг. И. Ньютон установил, что формула (1) обобщается на случай произвольных (дробных и отрицательных) показателей, но при этом получается сумма из бесконечного множества слагаемых. Именно он показал, что при $|x| < 1$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} x^k + \dots \quad (2)$$

При $n = -1$ формула (2) превращается в известную формулу для суммы бесконечной *геометрической прогрессии*:

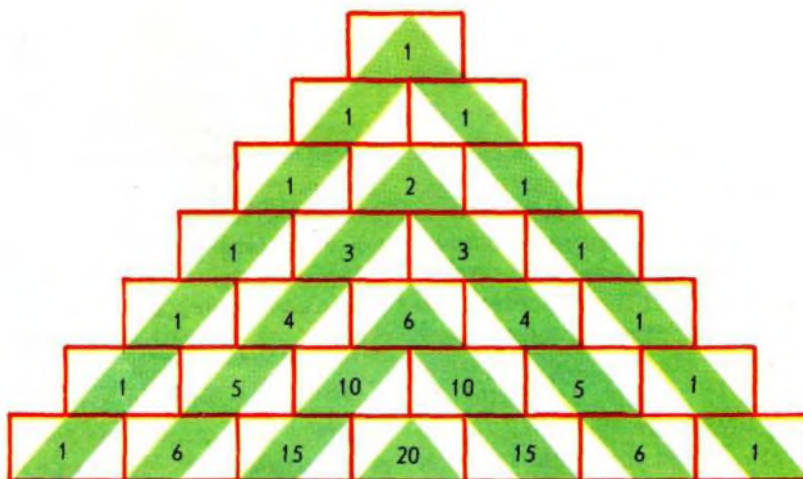
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^n + \dots$$

1. Треугольник Паскаля.

На рис. 1 изображено несколько первых строк числового треугольника, образованного по следующему правилу: *по краям каждой строки стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух стоящих над ним чисел предыдущей строки.*

По этому правилу легко выписывать одну за другой новые строки этого треугольника. Именно в такой форме он приведен в «Трактате об арифметическом треугольнике» французского математика Б. Паскаля (1623-1662), опубликованном в 1665 г., уже после смерти автора.

Рис. 1



Популярность чисел, составляющих треугольник Паскаля, не удивительна: они возникают в самых естественных задачах алгебры, комбинаторики, теории вероятностей, математического анализа, теории чисел.

Сколько различных k -элементных множеств (сочетаний) можно образовать из данных n элементов?

Каковы коэффициенты многочлена $(1+x)^n$?

Сколько существует строчек из n единиц и нулей, в которых ровно k единиц?

Сколькими разными путями можно спуститься из верхней точки A на рис 2. в k -й перекресток n -го ряда?

На все эти вопросы ответ дают числа C_n^k ,

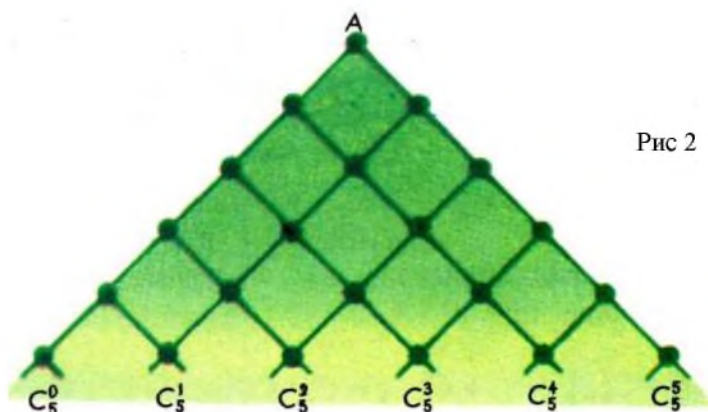


Рис 2

треугольника Паскаля. Обозначение C_n^k предполагает, что верхняя строка треугольника Паскаля состоит из одного числа $C_0^0 = 1$, следующая (первая)-из двух чисел $C_1^0 = C_1^1 = 1$, и вообще n -я строка состоит из $n+1$ чисел:

$$C_n^0 = 1, C_n^1 = n, C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, \dots, C_n^{n-1}, C_n^n$$

Числа C_n^k называют обычно числами сочетаний из n элементов по k , или **биномиальными коэффициентами** в некоторых книгах для них используют обозначение $\binom{n}{k}$. Оно удобно для запоминания простой формулы, позволяющей по заданным номерам n и k сразу вычислить, какое число стоит на k -м месте в n -й строке треугольника Паскаля:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

Используя обозначение факториала $m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m$, эту формулу

можно записать еще короче:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

В «равнобедренной» форме треугольника Паскаля на рис. 1 очевидно **свойство симметрии** каждой строки $C_n^k = C_n^{n-k}$; при этом посередине строки стоит самое большое число $C_n^{n/2}$ (если n четно) или два самых больших числа $C_n^{n/2-1} = C_n^{n/2+1}$ (если n нечетно), а к краям числа монотонно убывают.

Если записать тот же треугольник в «прямоугольной» форме (рис.3), то целый ряд свойств треугольника Паскаля, связанный с суммами его чисел, будет удобнее наблюдать. В частности, сумма нескольких первых чисел каждого столбца равна идущему за ними числу следующего столбца:

$$1 + 2 + \dots + (m-1) = C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2};$$

$$C_2^2 + C_3^2 + \dots + C_{m-1}^2 = C_m^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{6}$$

Числа $C_m^2 = m(m-1)/2$ называются **треугольными числами**, а числа C_m^3 - **пирамидальными**;

а при $m > k$,

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_{m-1}^k = C_m^{k+1}$$

Суммы чисел по «восходящим» (зеленым) диагоналям на рисунке 3 равны последовательным числам Фибоначчи.

Для применений в теории вероятностей особенно важны асимптотические формулы для чисел треугольника Паскаля, т.е. приближенные оценки этих чисел при больших n .

Домашнее задание

Знать, что такое бином Ньютона и уметь строить треугольник Паскаля

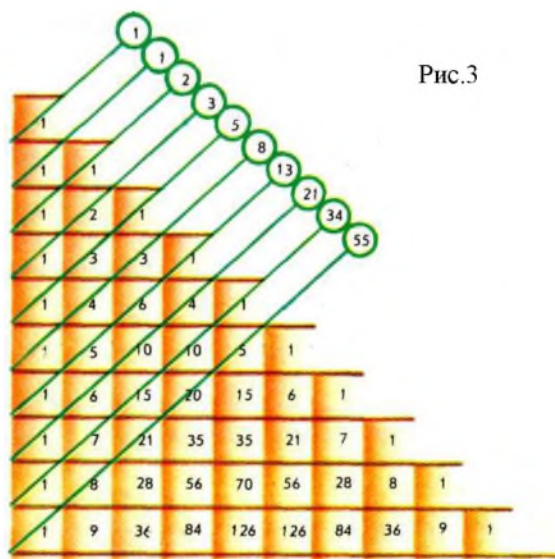


Рис.3