11декабря математика 1 курс юристы

Тема: **Основные тригонометрические тождества. Применение основных тригонометрических тождеств к преобразованию.**

Цели и задачи:

1.Уметь определять знаки, четность, периодичность тригонометрических функций. Уметь преобразовывать тригонометрические выражения, доказывать тождества.

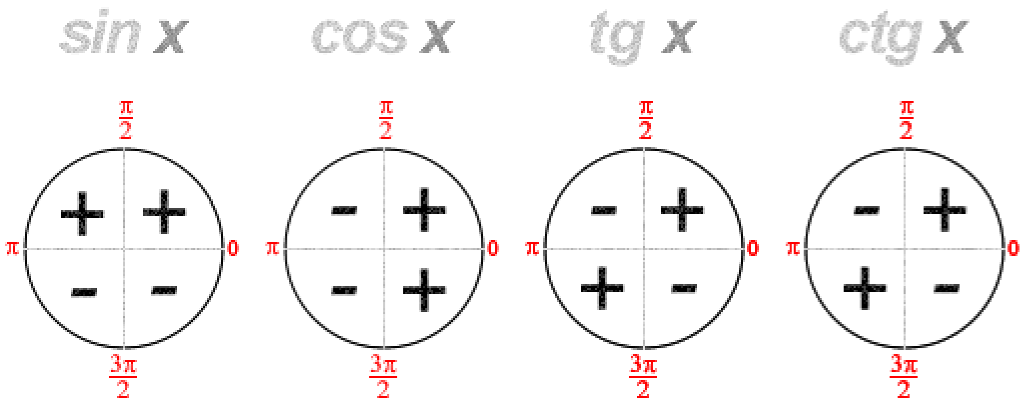
2.Развитие познавательных навыков и интересов у учеников.

3. Формирование навыков и умений и применение их в повседневной жизни.

.

Новый материал.

Рассмотреть знаки тригонометрических функций.



Равенство, состоящее из тригонометрических соотношений, справедливое для всех значений входящих в него величин углов, называется **тригонометрическим тождеством.**

Рассмотрим наиболее важные из тригонометрических тождеств.

Основные тригонометрические соотношения связаны тождествами:

1) **tg a = sin a /cos a**
2) **sin^2 a + cos^2 a = 1**
3) **1 + tg^2 a = 1/cos^2 a**
4) **1 + 1/tg^2 a = 1/sin^2 a**
5) **sin(90^o– a) = cos a**
6) **cos(90^o– a) = sin a**

Рассмотрим прямоугольный треугольник с острым углом a при вершине A .

Докажем основные тригонометрические тождества.

$$tg\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$$

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

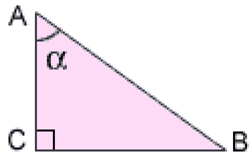
$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

$$1 + \frac{1}{tg^2\alpha} = \frac{1}{sin^2\alpha}$$

$$sin\,(90^o - \alpha) = cos\,\alpha$$

$$cos\,(90^o - \alpha) = sin\,\alpha$$

Тригонометрические тождества



Воспользуемся теоремой Пифагора.
Если мы разделим обе части равенства на квадрат длины стороны **AB** и вспомним определения косинуса и синуса угла, получим **второе** тождество.
При доказательстве третьего и четвертого утверждений, воспользуемся предыдущим доказательством.

$$|BC|^2+|AC|^2=|AB|^2$$

(по теореме Пифагора)

$$\left(\frac{|BC|}{|AB|}\right)^2+\left(\frac{|AC|}{|AB|}\right)^2=1$$

$$\sin\alpha=\frac{|BC|}{|AB|} \qquad \cos\alpha=\frac{|AC|}{|AB|}$$

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$$

Докажем **третье** утверждение теоремы. Воспользуемся только что полученным равенством. Разделим обе его части на $\cos^2$ a и получим требуемое тождество.

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

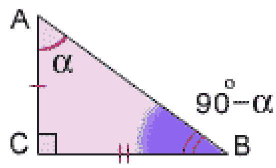
$$\boxed{1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

Докажем **четвертое** утверждение теоремы. Опять воспользуемся вторым тождество. Разделив обе части на **$\sin^2$ a** , получим четвертое тождество.

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$1+\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{1+\frac{1}{tg^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}}$$



Докажем пятое и шестое утверждения теоремы, предварительно повторив по Справочнику теорему о сумме углов треугольника.
Выразим величину угла при вершине **B** через угол **a** .
Вспомнив определения синуса и косинуса для углов при вершинах **A** и **B**, получаем **пятое** утверждение теоремы.

$$A\hat{B}C=90^\circ-B\hat{A}C=90^\circ-\alpha$$

(по теореме о сумме углов треугольника)

$$\sin\alpha=\frac{|BC|}{|AB|}$$

$$\cos(90^\circ-\alpha)=\cos A\hat{B}C=\frac{|BC|}{|AB|}$$

$$\boxed{\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha}$$

И наконец докажем шестое утверждения теоремы. Опять воспользуемся определениями синуса и косинуса для

$$\boxed{\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha}$$

углов при вершинах **A** и **B**, чтобы получить последнее утверждение теоремы.

Еще раз посмотри на доказанные формулы и запомни их!

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \frac{1}{tg^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

Тригонометрические тождества

3). Правила преобразования:

1) Если аргумент содержит $n \cdot \frac{\pi}{2}$, где **n - нечетное натуральное число** $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\ и\ т.д.\right)$, то функция меняется на "конфункцию", т.е. синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот. Если **n - четное натуральное число** $(\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi\ и\ т.д.)$, то название функции не изменяется.

2) Определяем знак ("+" или "-") значения первоначальной функции. Преобразованное выражение сохраняет знак своего родителя.

Пример 1:

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$$

1) *название функции изменяется*

2) *угол* $\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$ *располагается в III четверти, косинус отрицательный*

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$$

Пример 2:

$$\sin(2\pi + \alpha)$$

1) *название функции не изменяется*

2) *угол* $(2\pi + \alpha)$ *располагается в I четверти, синус положительный*

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha$$

Пример 3:

$$tg\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)$$

1) *название функции изменяется*

2) *угол* $\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)$ *располагается в IV четверти, тангенс отрицательный*

$$tg\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)=-ctg\,2\alpha$$

Пример 4:

$$ctg(5\pi+\alpha)$$

1) *название функции не изменяется*

2) *угол* $(5\pi+\alpha)$ *располагается в III четверти, котангенс положительный*

$$ctg(5\pi+\alpha)=ctg\,\alpha$$

4).Закрепление. №254-258, 262,267.

989. Положительным или отрицательным числом является следующее значение тригонометрической функции:
1) sin 110°; 2) cos 200°; 3) tg 160°; 4) ctg 220°;
5) sin 280°; 6) cos 340°; 7) tg(—95°); 8) ctg(—230°);
9) sin (—l30°); 10) cos 600°; 11) ctg 500°; 12) tg 670°?
13) cos 2; 14) sin (—3); 15) tg 10; 16) ctg 1,7?

990. Определить знак каждого из данных произведений:
1) sin 100° • sin 132° ; 2) cos 210° • sin 115°;
3) cos 285° • cos (—316°); 4) tg 112° • sin 165°;
5) cos 318° • tg (—214°); 6) ctg 303° • sin 220°;
7) sinl • cos 2; 8) sin 5 • tg 5;
9) sin (—118°) • cosll8° • tg 118°;
10) cos l23° • tg 231° • sin 312°; 11) sin3 • cos 4 • ctg 5.

5).Д\З. повторить**.**