10 ноября математика 1 курс юристы.

Тема: Бином Ньютона. Биномиальные коэффициенты и треугольник Паскаля.

Литература:

1. *Халамайзер А.Я. Комбинаторика и бином Ньютона. - М: Просвещение. 1980*
2. *Прикладная комбинаторная математика*
3. *Энциклопедический словарь юного математика/Сост. А.П. Савин. – М.: Педагогика, 1985г.*

1. Бином Ньютона - название формулы, выражающей степень двучлена в виде суммы одночленов.

Формулу для квадрата двучлена

$$(a+b)^2 = = a^2 + 2ab + b^2$$

знали, еще математики Древнего Вавилона, а древнегреческие математики знали ее геометрическое истолкование.

Если умножить обе части этой формулы на $(a + b)$ и раскрыть скобки, то получим:

$$(a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3,$$

т. е. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

Аналогичный шаг может привести к следующей формуле:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6\,a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\,.$$

Легко заметить закон образования коэффициентов: коэффициент 4 при a^3b есть сумма коэффициентов 3 и 1 при a^2b и a^3. Аналогично, коэффициент 6 при a^2b^2 является суммой (3 + 3) коэффициентов при ab^2 и a^2b. По тому же закону получаем и коэффициент 4 при ab^3.

Таким образом, коэффициент C^k_n при $a^{n-k}\,b^k$ в разложении $(a + b)^n$ равен сумме коэффициентов C^{k-1}_{n-1} и C^k_{n-1} при $a^{n-k}\,b^{k-1}$ и при $a^{n-k-1}\,b^k$ разложении $(a + b)^{n-1}$, а коэффициенты при a^n и при b^n равны единице.

Отсюда следует, что коэффициенты C^k_n в равенстве:

$$(a+b)^n = a^n + C^1_n\,a^{n-1}b + \ldots + C^k_n\,a^{n-k}b^k + \ldots + b^n \qquad (1)$$

являются членами (n+1)-й строки треугольника Паскаля.

Это утверждение было известно задолго до Паскаля - его знал живший в XI-XII вв. среднеазиатский математик и поэт Омар Хайям (к сожалению, его сочинение об этом до нас не дошло).

2. Биномиальные коэффициенты.

Первое дошедшее до нас описание формулы бинома Ньютона содержится в появившейся в 1265 г. книге среднеазиатского математика ат-Туси, где дана таблица чисел C^k_n (***биномиальных коэффициентов***) до $n = 12$ включительно.

Европейские ученые познакомились с формулой бинома Ньютона, по-видимому, через восточных математиков. Детальное изучение свойств биномиальных коэффициентов провел французский математик и философ Блез Паскаль в 1654 г. Еще до этого было известно, что числа

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot k}$$

являются в то же время числами «сочетаний без повторений» из n элементов по k.

В 1664-1665 гг. И. Ньютон установил, что формула (1) обобщается на случай произвольных (дробных и отрицательных) показателей, но при этом получается сумма из бесконечного множества слагаемых. Именно он показал, что при $|x| < 1$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + ... + \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot k}x^k + ... \qquad (2)$$

При $n = -1$ формула (2) превращается в известную формулу для суммы бесконечной *геометрической прогрессии:*

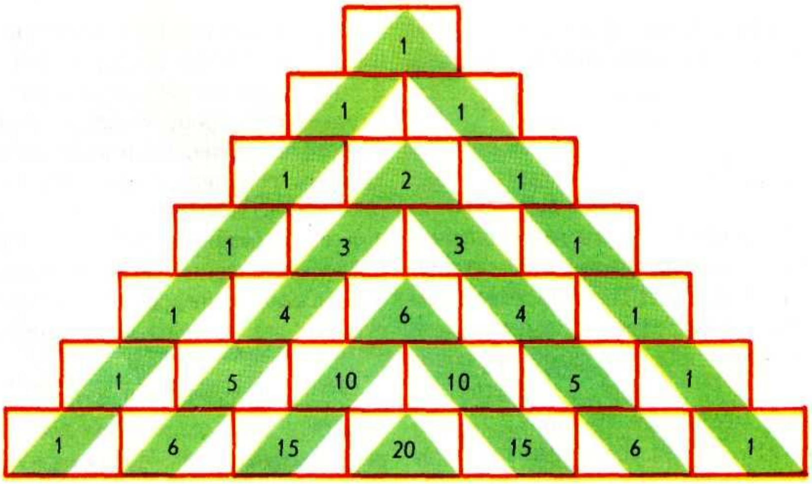
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^{n-1}x^n + ...$$

1. Треугольник Паскаля.

На рис. 1 изображено несколько первых строк числового треугольника, образованного по следующему правилу: ***по краям каждой строки стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух стоящих над ним чисел предыдущей строки.***

По этому правилу легко выписывать одну за другой новые строки этого треугольника. Именно в такой форме он приведен в «Трактате об арифметическом треугольнике» французского математика Б. Паскаля (1623-1662), опубликованном в 1665 г., уже после смерти автора.

Рис. 1



Популярность чисел, составляющих треугольник Паскаля, не удивительна: они возникают в самых естественных задачах алгебры, комбинаторики, теории вероятностей, математического анализа, теории чисел.

Сколько различных k-элементных множеств (сочетаний) можно образовать из данных n элементов?

Каковы коэффициенты многочлена $(1+x)^n$*?*

Сколько существует строчек из n единиц и нулей, в которых ровно k единиц?

Сколькими разными путями можно спуститься из верхней точки A на рис 2. в k-й перекресток n-го ряда?

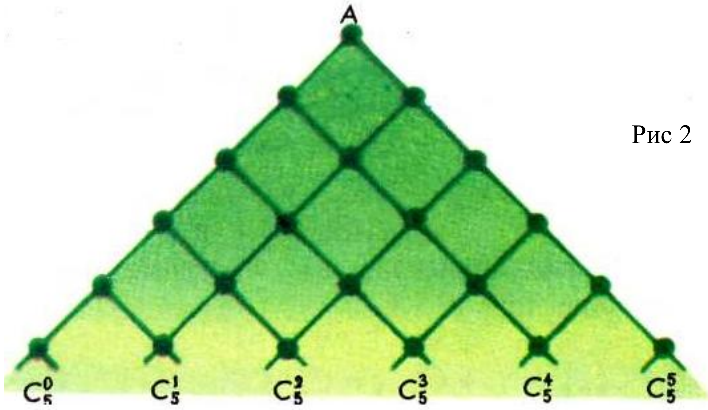


Рис 2

На все эти вопросы ответ дают числа C^k_n , треугольника Паскаля. Обозначение C^k_n предполагает, что верхняя строка треугольника Паскаля состоит из одного числа $C^0_0 = 1$, следующая (первая)-из двух чисел $C^0_1 = C^1_1 = 1$, и вообще *n-я* строка состоит из *n+1* чисел:

$$C_n^0 = 1, C_n^1 = n, C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n$$

Числа C^k_n *называют обычно числами сочетаний из n элементов по* k, *или* ***биномиальными коэффициентами*** в некоторых книгах для них используют обозначение $\binom{n}{k}$. Оно удобно для запоминания простой формулы, позволяющей по заданным номерам n и k сразу вычислить, какое число стоит на *к-м* месте в n-й строке треугольника Паскаля:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

Используя обозначение факториала $m! = = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$, эту формулу можно записать еще короче: $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

В «равнобедренной» форме треугольника Паскаля на рис. 1 очевидно **свойство симметрии** каждой строки $C^{\,k}_{\,n} = C^{\,n\text{-}k}_{\,n}$; при этом посередине строки стоит самое большое число $C_n^{n/2}$ (если *n* четно) или два самых больших числа $C_n^{n/2-1} = C_n^{n/2+1}$ (если *n* нечетно), а к краям числа монотонно убывают.

Если записать тот же треугольник в «прямоугольной» форме (рис.3), то целый ряд свойств треугольника Паскаля, связанный с суммами его чисел, будет удобнее наблюдать. В частности, сумма нескольких первых чисел каждого столбца равна идущему за ними числу следующего столбца:

$$1 + 2 + \ldots + (m-1) = C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2};$$

$$C_2^2 + C_3^2 + \ldots + C_{m-1}^2 = C_m^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{6}$$

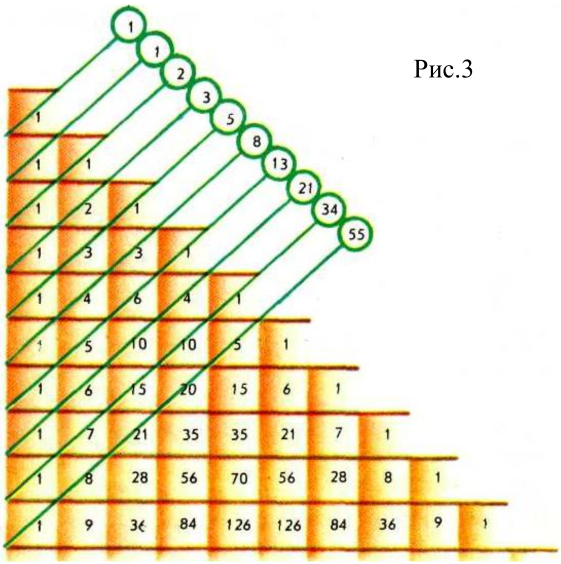


Рис.3

Числа $C_m^2 = m(m-1)/2$ называются ***треугольными числами***, а числа C_m^3 - ***пирамидальными***;

а при *m*> *к*,

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_{m-1}^k = C_m^{k+1}$$

Суммы чисел по «восходящим» (зеленым) диагоналям на рисунке 3 равны последовательным числам Фибоначчи.

Для применений в теории вероятностей особенно важны асимптотические формулы для чисел треугольника Паскаля, т.е. приближенные оценки этих чисел при больших *n*.

Домашнее задание

Знать, что такое бином Ньютона и уметь строить треугольник Паскаля