7 ноября матем 1 курс технологи.

Знать формулу, разобрать решение примеров

Тема: Бином Ньютона - формула.

Формула бинома Ньютона для натуральных *n* имеет вид

$$\boxed{(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + C_n^n \cdot b^n},$$

где $C_n^k = \dfrac{(n)!}{(k)! \cdot (n-k)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{(k)!}$ - биномиальные коэффициенты, представляющие из себя сочетания из *n* по *k*, *k*=0,1,2,…,*n*.

К примеру, известная формула сокращенного умножения «квадрат суммы» вида

$$(a+b)^2 = C_2^0 \cdot a^2 + C_2^1 \cdot a^1 \cdot b + C_2^2 \cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

есть частный случай бинома Ньютона при *n*=2.

Выражение, которое находится в правой части формулы бинома Ньютона, называют разложением выражения $(a+b)^n$, а выражение $C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ называют *(k+1)*-ым членом разложения, *k*=0,1,2,…,*n*.

показатель степени	биномиальные коэффициенты														
0								1							
1							1		1						
2						1		2		1					
3					1		3		3		1				
4				1		4		6		4		1			
5			1		5		10		10		5		1		
⋮		…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
n	C_n^0		C_n^1	…	…	…	…	…	…	…	…	…	C_n^{n-1}		C_n^n

.

Практическая часть

Пример 1.

Напишите разложение выражения $(a+b)^5$ по формуле бинома Ньютона.

Решение.

Смотрим на строку треугольника Паскаля, соответствующую пятой степени. Биномиальными коэффициентами будут числа 1, 5, 10, 10, 5, 1. Таким образом, имеем

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Пример 2.

Найдите коэффициент бинома Ньютона для шестого члена разложения выражения $(a+b)^{10}$.

Решение.

В нашем примере n=10, k=6-1=5. Таким образом, мы можем вычислить требуемый биномиальный коэффициент:

$$C_n^k = C_{10}^5 = \frac{(10)!}{(5)!\cdot(10-5)!} = \frac{(10)!}{(5)!\cdot(5)!} =$$
$$= \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{(5)!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 252$$

Пример 3.

Доказать, что значение выражения $5^n + 28\cdot n - 1$, где n – натуральное число, делится на 16 без остатка.

Решение.

Представим первое слагаемое выражения как $5^n = (4+1)^n$ и воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$5^n + 28\cdot n - 1 = (4+1)^n + 28\cdot n - 1 =$$
$$= C_n^0\cdot4^n + C_n^1\cdot4^{n-1}\cdot1 + \ldots + C_n^{n-2}\cdot4^2\cdot1^{n-2} + C_n^{n-1}\cdot4\cdot1^{n-1} + C_n^n\cdot1^n + 28\cdot n - 1 =$$
$$= 4^n + C_n^1\cdot4^{n-1} + \ldots + C_n^{n-2}\cdot4^2 + n\cdot4 + 1 + 28\cdot n - 1 =$$
$$= 4^n + C_n^1\cdot4^{n-1} + \ldots + C_n^{n-2}\cdot4^2 + 32\cdot n =$$
$$= 16\cdot\left(4^{n-2} + C_n^1\cdot4^{n-3} + \ldots + C_n^{n-2} + 2\cdot n\right)$$

Полученное произведение доказывает делимость исходного выражения на 16.