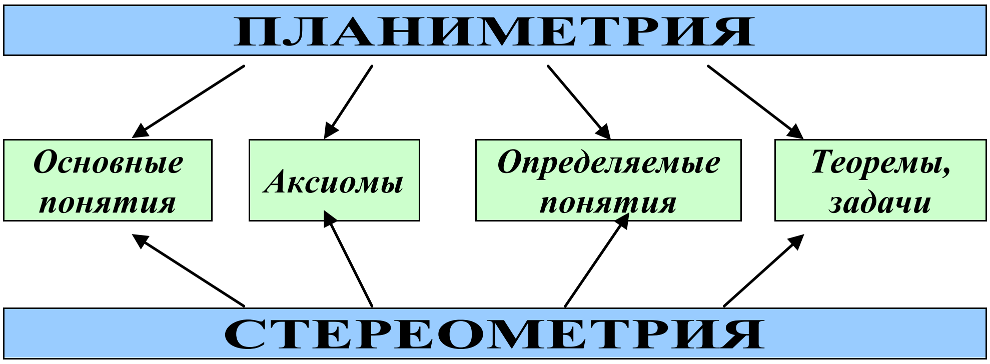
**6 ноября матем 1 курс ЖКХ**

**Тема: «ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ»**

**Ответить на контрольные вопросы.**

## 1 Структура курса геометрии

***Стереометрия*** — это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве. Она является второй составляющей геометрии и строится так же, как и планиметрия.

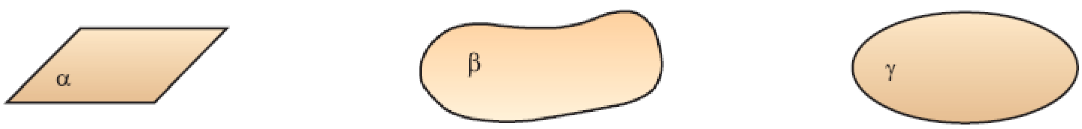



В стереометрии свойства геометрических фигур устанавливаются с помощью доказательства теорем (из греч. — рассматриваю), которые основываются на аксиомах (из греч. — считаю достойным, настаиваю, требую) — математических предложениях, принимаемых без доказательства

## 2 Определения и обозначения

Некоторые понятия геометрии являются ***основными***. Основные фигуры планиметрии — *точка и прямая* — автоматически становятся основными фигурами стереометрии. Как и в планиметрии, точки обозначают прописными буквами латинского алфавита — $A, B, C$, ..., прямые — строчными буквами латинского алфавита — $a, b, c$, ...

В пространстве рассматривается еще одна основная фигура — ***плоскость***. Ее можно представить как идеально гладкую поверхность доски, которая продлена во все стороны до бесконечности. Плоскости обозначают строчными буквами греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma$, ... и изображают по-разному. На рисунке показаны примеры изображения плоскостей на листе бумаги.

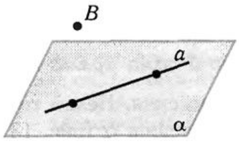


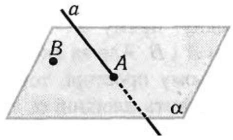

Плоскость принято считать непрозрачной, поэтому части линий, которые «скрыты» под плоскостью изображают пунктиром.

Плоскость понимают также как множество точек.

Если $A$ — точка плоскости $\alpha$, то говорят, что ***точка** $A$ **лежит в плоскости** $\alpha$**, а плоскость** $\alpha$ **проходит через точку*** $A$. Записывают: $A \in \alpha$. Запись $A \notin \alpha$ означает, что точка $A$ не лежит в плоскости $\alpha$.

Если каждая точка прямой $a$ принадлежит плоскости $\alpha$, то говорят, что ***прямая** $a$ **лежит в плоскости** $\alpha$**, а плоскость** $\alpha$ **проходит через прямую** $a$**.*** Записывают: $a \subset \alpha$. Запись $b \not\subset \alpha$ означает, что прямая $b$ не лежит в плоскости $\alpha$




Если прямая $a$ и плоскость $\alpha$ имеют только одну общую точку $A$, говорят, что ***они пересекаются в точке*** $A$***. Записывают:*** $a \cap \alpha = A$. На рисунке невидимую часть прямой (за плоскостью) изображают штриховой линией.

## 3 Основные свойства плоскости

Основные свойства точек, прямых и плоскостей, касающиеся их взаимного расположения, выражены в аксиомах.

Система аксиом стереометрии состоит из двух групп. Первая из них включает все аксиомы планиметрии. Они выполняются в каждой плоскости пространства. Эти аксиомы вам известны из курса планиметрии. Здесь рассмотрим группу аксиом, выражающую основные свойства плоскостей в пространстве.

> ***1 Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну***
>
> ***2 Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.***
>
> ***3 Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.***

Благодаря первому свойству плоскость можно обозначать тремя ее точками. Если плоскость определена тремя точками, которые не лежат на одной прямой, например $A, B, C$, то в таком случае плоскость обозначают — $(ABC)$. Читается: «плоскость $ABC$».

Утверждение, истинность которого доказана и которое используют для доказательства других утверждений, называют ***теоремой***. Простейшими теоремами являются ***следствия из аксиом стереометрии.***

> ***Теорема 1 Через прямую и точку, не принадлежащую ей, можно провести плоскость и притом только одну***

***Доказательство***. Данная точка и две точки прямой составляют три точки, не лежащие на одной прямой. По аксиоме 1 через них проходит единственная плоскость. По аксиоме 3 данная прямая лежит в этой плоскости.

> ***Теорема 2 Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и притом только одну.***

***Доказательство.*** На каждой из прямых можно взять по одной необщей точке. Вместе с точкой пересечения прямых они образуют три точки, не лежащие на одной прямой. По аксиоме 1 через них проходит единственная плоскость. По аксиоме 3 обе прямые лежат в этой плоскости.

***Теорема 3 Через две параллельные прямые можно провести плоскость и притом только одну.***

***Доказательство***. По теореме 1 через одну из параллельных прямых и произвольную точку другой прямой можно провести плоскость, и притом только одну.

**Если учесть вышеизложенное, то можно сделать вывод, что плоскость однозначно определяют:**

**1) три точки, не лежащие на одной прямой;**

**2) прямая и точка, не принадлежащая этой прямой;**

**3) две пересекающиеся прямые;**

**4) две параллельные прямые.**

## 4 Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

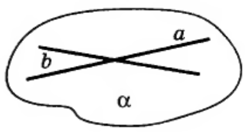
***Взаимное расположение прямых в пространстве*** можно свести к следующим случаям.

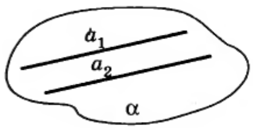
1 Прямые ***пересекаются***, тогда они лежат в одной плоскости.

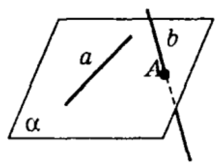
2 Прямые ***параллельны*** — тогда они лежат в одной плоскости

3 Прямые не пересекаются и не параллельны — такие прямые называются ***скрещивающимися***.

4 Прямые ***совпадают,*** если они имеют по крайней мере две общие точки



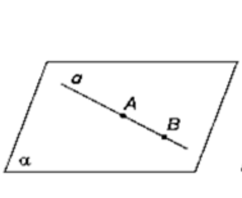

$a \times b$ $\qquad$ $a$ P$b$ $\qquad$ $a$ B$b$

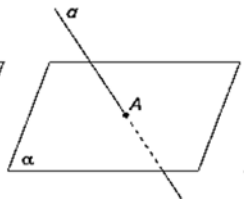
Возможны следующие варианты ***взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве***:

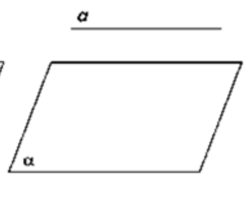
1) Прямая и плоскость имеют по крайней мере две общие точки. Тогда прямая ***лежит в плоскости***, то есть прямая и плоскость имеют множество общих точек;

2) Прямая и плоскость ***имеют одну общую точку***. Возможность такого размещения прямых и плоскостей обеспечивается тем, что вне плоскости являются точки пространства. Произвольная точка плоскости и точка вне плоскости определяют прямую, которая имеет с плоскостью одну общую точку, то есть ***пересекает*** ее.

3) Прямая и плоскость не имеют общих точек, то есть ***не пересекаются***. Прямая и плоскость, которые не имеют общих точек, называются ***параллельными***



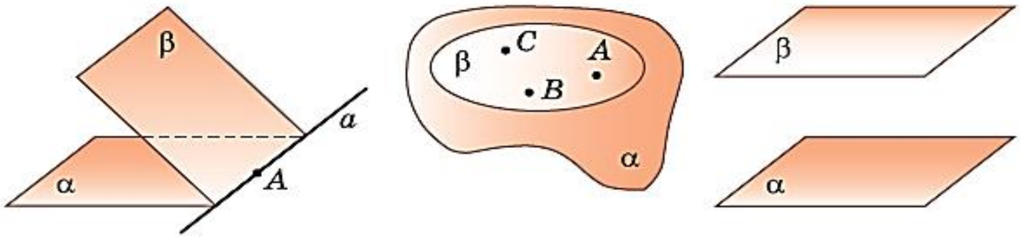
Для трех случаев взаимного размещения прямой и плоскости будем употреблять соответствующие обозначения: $a \subset \alpha$; $a \times \alpha$; $a \parallel \alpha$.

***Плоскости в пространстве*** могут принимать следующие положения друг относительно друга:

1 Две плоскости ***пересекаются по прямой*** — в этом случае они не имеют других общих точек вне этой прямой

2 Плоскости ***совпадают***

3 Если две разные плоскости не имеют общих точек, то они называются ***параллельными***.




$A \in \alpha, A \in \beta, \alpha \cap \beta = a$ $\qquad$ $\alpha = \beta$ $\qquad$ $\alpha \parallel \beta$

## Контрольные вопросы

1 Какой раздел геометрии называется стереометрией?

2 Какие предложения называются аксиомами? Теоремами?

3 Сформулируйте аксиомы плоскости и следствия из них.

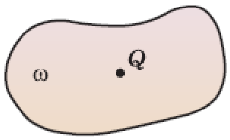
4 Назовите возможные варианты взаимного расположения прямых в пространстве.

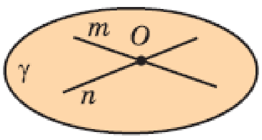
5 Перечислите возможные варианты взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве.

6 Приведите возможные варианты взаимного расположения плоскостей в пространстве.

## Задачи, задания, вопросы

№1 Укажите количество точек, которые принадлежат плоскости $\omega$.




№2 На рисунке изображено две прямых $m$ и $n$, пересекающиеся в точке $O$ и определяющие плоскость $\gamma$. Укажите, какое количество прямых, проходящих через точку $O$, лежит на плоскости $\gamma$.

№3 Выберите для двух различных плоскостей $\alpha$ и $\beta$ одинаковые по смыслу утверждения.

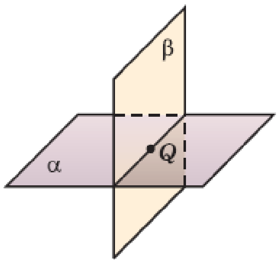
1) Плоскости $\alpha$ и $\beta$ пересекаются;

2) плоскости $\alpha$ и $\beta$ имеют лишь одну общую точку;

3) плоскости $\alpha$ и $\beta$ имеют общую точку;

4) плоскости $\alpha$ и $\beta$ имеют не больше двух общих точек;

5) плоскости $\alpha$ и $\beta$ имеют общую прямую.




№4 Две различные плоскости имеют общую точку $Q$. Определите, сколько прямых, проходящих через точку $Q$, являются общими для плоскостей $\alpha$ и $\beta$.

№5 Плоскости пересекаются. Определите количество общих прямых, которые они могут иметь.

№6 Точки $A$, $B$, $C$ лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

№7 Выберите четыре утверждения, которые определяют единственность плоскости.

1) Любые две точки пространства;
2) любая прямая пространства и точка на ней;
3) любая прямая пространства и точка вне нее;
4) любые три прямых пространства;
5) любые три точки пространства;
6) любые две параллельные прямые;
7) любые две прямые;
8) любые две пересекающиеся прямые.