

Тема: Радианная мера угла. Поворот точки вокруг начала координат.

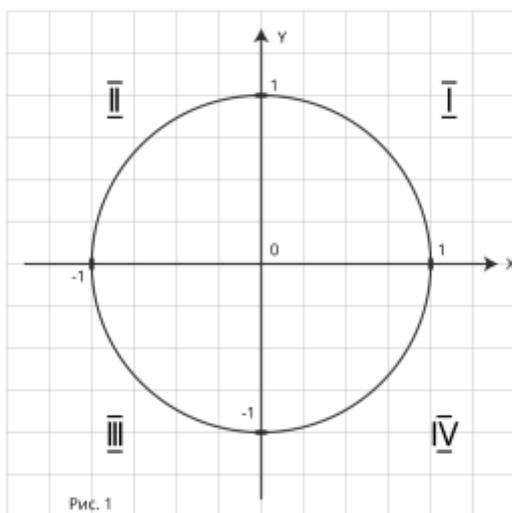
На уроках геометрии мы с вами изучали окружность, её элементы, свойства. Повторим понятие окружности. Это замкнутая линия, все точки которой равноудалены от центра.

Радиусом окружности называется отрезок, соединяющий её центр с любой лежащей на окружности точкой.

На окружности можно выделить дугу. А если рассмотреть круг - часть плоскости, ограниченной окружностью - то можно выделить круговой сектор.

«Окружность бесконечно большого круга и прямая линия – одно и то же» Г. Галилей

Действительно, и окружность и прямая – бесконечны. Рассмотрим окружность радиуса, равному 1 единичному отрезку, в прямоугольной системе координат xOy с центром в начале координат. Такую окружность называют *единичной* или *тригонометрической*. (рис.1)



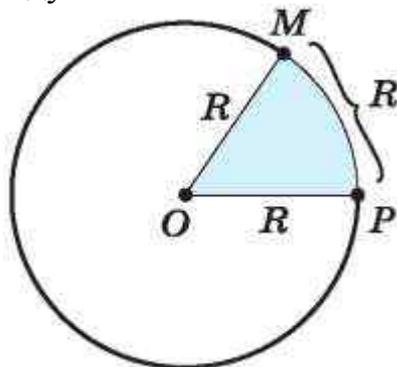
Длина этой окружности, как мы помним из уроков геометрии, $C=2\pi R$. А учитывая, что $R=1$, $C=2\pi$, осями координат она поделена на четыре дуги, которые находятся соответственно в I, II, III и IV координатных четвертях.

Вычислите длину каждой дуги.

Ответ. длина каждой дуги равна $\frac{1}{4}$ части окружности или $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Длина полуокружности равна π . А так как образовался развернутый угол, то $\pi=180^\circ$.

Рассмотрим дугу, равную по длине радиусу единичной окружности. Полученный центральный угол POM равен длине дуги $MP=R$.



Определение. Углом в 1 радиан называется центральный угол, опирающийся на дугу, равную по длине радиусу окружности.

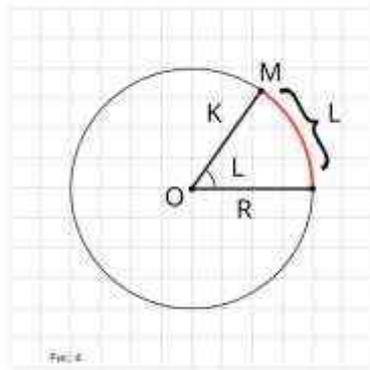
Обозначается ***1рад.***

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi};$$

Подставим в эту формулу $\pi \approx 3,14$, получим: $1 \text{ рад} \approx 57,3^\circ$;

Угол, равный α рад, вычисляется по формуле $\alpha \text{ рад} = (180/\pi \alpha)^\circ$ (1)

Длину дуги l окружности радиуса R (рис.4)



можно вычислять по формуле $l = \alpha * R$ (3)

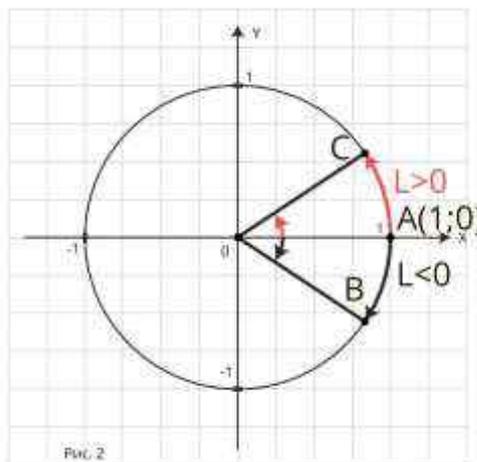
А площадь S кругового сектора радиуса R и дугой α рад

находят по формуле: $S = \frac{R^2}{2} \alpha$, где $\alpha \in (0; \pi)$ (4)

Вернёмся к единичной окружности в координатной плоскости.

Каждая точка этой окружности будет иметь координаты x и y такие, что выполняются неравенства $-1 \leq x \leq 1$; $-1 \leq y \leq 1$.

Введём понятие поворота точки. (рис.2)



1. Пусть $\alpha > 0$ Тогда точка $A(1;0)$ будет двигаться по единичной окружности против часовой стрелки. Она пройдёт путь α рад от точки $A(1;0)$ до точки B . Говорят, точка B получена из точки A поворотом на угол α

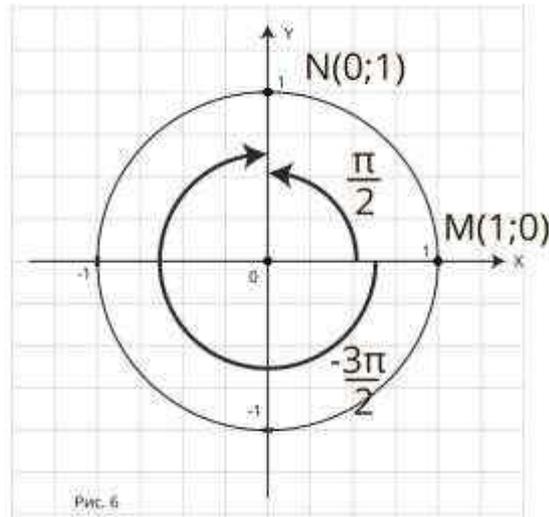
2. Пусть $\alpha < 0$. Тогда точка $A(1;0)$ будет двигаться по единичной окружности по часовой стрелки. Она пройдёт путь α рад от точки $A(1;0)$ до точки C . Говорят, точка C получена из точки A поворотом на угол $-\alpha$.

При повороте на 0 рад точка остаётся на месте.

Давайте рассмотрим такой пример:

при повороте точки $M(1;0)$ на угол $\frac{\pi}{2}$ получается точка $N(0;1)$. В эту же точку

можно попасть из точки $M(1;0)$ при повороте на угол $= \frac{3\pi}{2}$ (рис.6)



Примеры и разбор решения заданий

Пример 1.

Найти градусную меру угла, равного $\frac{2\pi}{3}$ рад.

Решение: Используя формулу (1),

$$\text{находим } \frac{2\pi}{3} \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} \right) = 120.$$

Так как $180 = \pi$, то $1 = \frac{\pi}{180}$ рад, тогда $\alpha^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha \text{ рад}$ (2)

Ответ: 120° .

Пример 2. Найти радианную меру угла, равного 60° ; 20° .

Решение:

$$\text{Вычисляем по формуле (2): } 60^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ рад}$$

$$20^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 20^\circ = \frac{\pi}{9} \text{ рад}$$

При обозначении мер угла, наименование «рад» опускают.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$ рад, $\frac{\pi}{9}$ рад.

Пример 3. Найти длину дуги окружности радиуса 6 см, если её радианная мера $\frac{3\pi}{4}$.

Решение: Используя формулу (3),

$$\text{получим: } l = \alpha R = 6 \cdot \frac{3\pi}{4} = 4,5\pi \text{ (см)}$$

Ответ: $4,5\pi$ см.

Пример 4. Найти площадь сектора, если радиус окружности 10 м, а радианная мера центрального угла $\frac{9\pi}{10}$.

Решение:

$$\text{По формуле (4) вычисляем } S = \frac{R^2}{2} \cdot \alpha = \frac{10^2}{2} \cdot \frac{9\pi}{10} = 45\pi \text{ (м}^2\text{)}$$

Ответ: $45\pi \text{ м}^2$

Задание

Изучить конспект и выписать определения (**красным**) в тетрадь, разобрать решенные примеры и записать их в тетрадь

Выполненные работы выслать преподавателю на эл.почту